

## CAPITULO II

---

### LAS TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS

Este capítulo es uno de los más importantes de la ciencia geométrica. Las transformaciones que en él vamos a estudiar, presentan también un gran interés pedagógico, porque en definitiva no son otra cosa que una generalización del concepto de función, el cual constituye según las modernas tendencias, el eje de la enseñanza matemática.

Comenzaremos por las *transformaciones puntuales* que forman la clase más sencilla de las transformaciones geométricas.

En ellas se considera el punto como elemento del espacio y, luego, se hace corresponder a cada punto otro punto, mientras que en otras transformaciones a los puntos corresponden otros elementos, como rectas, planos, superficies esféricas, etc. Para el estudio de estas transformaciones comenzaremos tratándolas analíticamente, porque haciéndolo así se pueden expresar con mayor exactitud todas las relaciones.

La representación analítica de una transformación puntual, es lo que en Análisis se llama *introducción de nuevas variables*  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , que se dan como funciones de las antiguas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \psi(x, y, z) \\ z' &= \chi(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

Este sistema de ecuaciones puede ser empleado en la Geometría de dos modos, que llamaremos respectivamente *pasivo* y *activo*. El primero consiste en un cambio del sistema de coordenadas, de tal modo que a cada punto de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , le corresponden las nuevas coordenadas  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Hasta ahora hemos empleado este método solamente para el estudio de las transformaciones del sistema de coordenadas rectangulares, pero

claro es que, empleando funciones generales  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$ , se obtendrán los pasos a otros sistemas de naturaleza diferente, como, por ejemplo, coordenadas triangulares, polares, elípticas, etc.

El segundo modo (*activo*) de emplear las ecuaciones anteriores es considerar fijo el sistema de coordenadas, con lo cual a cada punto  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , le corresponde otro  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Este método, que es el que usaremos en lo sucesivo, equivale, como se ve, a una transformación de los puntos del espacio.

Los casos de transformaciones que aquí hemos estudiado

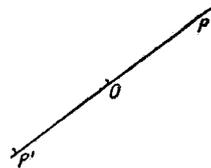


Figura 49

(página 35 y siguiente), con arreglo al primer método, pueden también interpretarse de un modo *activo*, y se ve fácilmente que los dos primeros grupos de aquellas fórmulas representan una *traslación del espacio*, considerado como figura rígida, y un *giro* del mismo alrededor del origen de coordenadas; el tercer grupo da una *inversión de los puntos del espacio*, en la cual a cada punto le corresponde su simétrico, respecto de O (fig. 49); y, finalmente, el último grupo representa una *transformación de semejanza*.

Empezaremos considerando un grupo de transformaciones particularmente sencillo, el de las *transformaciones afines*, que comprenden como casos especiales todas las transformaciones que acabamos de citar.

### I. Transformaciones afines

Una transformación afín está definida de tal manera, que  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , son funciones lineales enteras de las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

El nombre, ya utilizado por Möbius y Euler, con el que estas transformaciones se designan, quiere decir que en ellas a todo punto del infinito le corresponde otro también del infinito, como si en cierto modo se conservasen los límites del espacio. En efecto, en las fórmulas (1)  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , se hacen infinitas al mismo tiempo que  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Este caso es contrario al de las transformaciones proyectivas generales que trataremos más adelante, en las cuales  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , son funciones lineales fraccionarias de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y, por consiguiente, puede ocurrir que un punto propio se transforma en uno del infinito.

En la Física, estas transformaciones, designadas con el nombre de *deformaciones homogéneas*, desempeñan un importante papel. La palabra «homogénea» expresa en oposición a «heterogéneas», la independencia de los coeficientes respecto del lugar en que se opera, y el nombre de «deformaciones», indica que generalmente la forma de un cuerpo no se conserva en la operación.

La transformación (1), puede evidentemente, ser considerada como compuesta de tres traslaciones del espacio paralelas a los tres ejes, y de longitudes iguales a  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , respectivamente, y de una transformación lineal homogénea de la forma

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

que deja invariable el origen (transformación centro-afín), y es más cómoda para el estudio. Comenzaremos por el estudio de esta transformación (2).

1) La posibilidad de que el sistema de ecuaciones (2), tenga o no solución, depende, como es sabido, de que el determinante de los coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

sea nulo o no. Supongamos, por ahora, que  $\Delta$  es distinto de

cero ; en este caso, el sistema tiene una *solución única* de la forma,

$$\left. \begin{aligned} x &= a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z' \\ y &= a'_2 x' + b'_2 y' + c'_2 z' \\ z &= a'_3 x' + b'_3 y' + c'_3 z' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde  $a'_1, \dots, c'_3$ , son los coeficientes de dividir los menores de  $\Delta$ , por el mismo  $\Delta$ . Por consiguiente, a cada punto  $x, y, z$ , corresponde *uno y solo un* punto  $x', y', z'$ , y el paso de  $x', y', z'$  a  $x, y, z$ , es también una transformación afín.

2) Propongámonos estudiar *cómo varían las formas espaciales en la afinidad*. Sea, en primer lugar, un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Aplicando las fórmulas (4), se obtiene la ecuación de la figura homóloga :

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$$

donde  $A', \dots, D'$ , dependen de  $A, \dots, D$ , y de los coeficientes de la transformación. Según (1), cada punto de este segundo, es homólogo de uno del primero ; a un plano le corresponde, pues, otro plano. Como una recta puede considerarse como intersección de dos planos, es evidente que se transformará en *otra recta*. Las transformaciones que gozan de esta propiedad, se denominan *colineaciones* (Möbius), y también *homografías*, porque conservan la «colineación» de tres puntos, es decir, la propiedad de estar en una recta. *La afinidad es, por lo tanto, una colineación.*

Sea, ahora, la *superficie de segundo orden* :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0$$

La aplicación de las fórmulas (4), produce otra ecuación cuadrática, lo que demuestra que la *afinidad transforma toda superficie de segundo orden, en una nueva superficie de segundo orden*. En general, una *superficie cualquiera se transforma en otra del mismo orden*.

Más adelante tendrá especial interés la consideración de las

superficies que corresponden a una esfera. Según lo que acabamos de ver, deben ser de segundo grado, porque de este grado es la superficie esférica; y como, además, todos los puntos de la esfera son propios, lo mismo debe ocurrir a la superficie homóloga, que, por consiguiente, será un *elipsoide*.

3) Un *vector libre* de componentes  $X = x_1 - x_2$ ,  $Y = y_1 - y_2$ ,  $Z = z_1 - z_2$ , se transforma en virtud de las fórmulas (2), en otro formado por el segmento 1' 2' y de componentes  $X' = x'_1 - x'_2$ ,  $Y' = y'_1 - y'_2$ ,  $Z' = z'_1 - z'_2$ , siendo

$$\left. \begin{aligned} X' &= a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' &= a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' &= a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Estas nuevas componentes sólo dependen, pues, de  $X, Y, Z$  y no de las coordenadas  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ , es decir, a todos

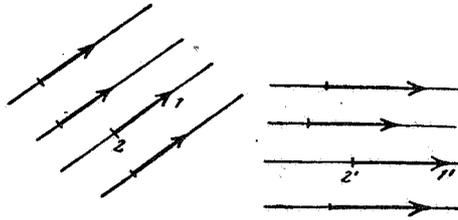


Figura 50

los segmentos 12 con los mismos componentes  $X, Y, Z$ , corresponden segmentos con los mismos componentes  $X', Y', Z'$ ; en otros términos: *en toda afinidad, a cada vector libre le corresponde un vector libre*. El contenido de esta proporción es más amplio que el de la propiedad antes vista de que a toda recta corresponde una recta. Tomemos, en efecto, sobre dos rectas paralelas segmentos iguales, y dirigidos en el mismo sentido; estos representan el mismo vector libre, y como sus transformadas deben representar otro, es preciso que sean segmentos *paralelos iguales y del mismo sentido* (fig. 50). Por consiguiente, *a cada sistema de rectas paralelas corresponden rectas también paralelas, y a segmentos iguales de las primeras, segmentos iguales de las segundas*. Esta propiedad es tanto más notable cuanto que, en general, las transformaciones afines no conservan los segmentos ni los ángulos.

4) Consideremos ahora dos vectores desiguales situados *sobre una misma recta*. Estos sabemos que pueden obtenerse uno de otro, por multiplicación por un escalar; luego, como en las fórmulas (5)  $X', Y', Z'$ , son funciones lineales homogéneas de  $X, Y, Z$ , los vectores homólogos se deducen uno de otro multiplicando por aquel mismo factor, lo cual demuestra que sus longitudes están en la misma razón que las de sus homólogos, propiedad que puede expresarse diciendo que *la relación entre dos rectas homólogas en una afinidad es una « semejanza »*, es decir, *la razón de los segmentos correspondientes en las dos rectas es constante*.

5) Finalmente, vamos a comparar los volúmenes de dos tetraedros homólogos  $T=(1, 2, 3, 4)$  y  $T'=(1', 2', 3', 4')$ . Según es sabido, se tiene:

$$6 T' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 & 1 \\ x'_4 & y'_4 & z'_4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, & a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1, & a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1, & 1 \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2, & a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2, & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2, & 1 \\ a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3, & a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3, & a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3, & 1 \\ a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4, & a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 z_4, & a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 z_4, & 1 \end{vmatrix}$$

de donde, teniendo en cuenta la conocida regla de multiplicación de determinantes, resulta:

$$6 T' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

el primer factor es el determinante  $\Delta$  del sistema (2); el segundo es  $6T$ , luego se tiene:

$$T' = \Delta \cdot T$$

lo cual dice que *en las transformaciones afines, el volumen de un tetraedro y, en general, cualquier volumen (como suma de tetraedros o límite de sumas de esta naturaleza), resulta multi-*

plificado por un factor constante que es el determinante  $\Delta$  de la sustitución.

Estas propiedades que hemos obtenido de la definición analítica de la afinidad, bastan ya para dar de ella una *representación geométrica intuitiva*; y su deducción ha sido más sencilla de lo que se acostumbra, porque hemos utilizado el concepto de vector, que es el auxiliar más adecuado para ello. La representación geométrica más precisa de la transformación afín se obtiene partiendo de una *superficie esférica* en el espacio  $E$  de los puntos  $x, y, z$ ; como ya hemos dicho, le corresponde en el

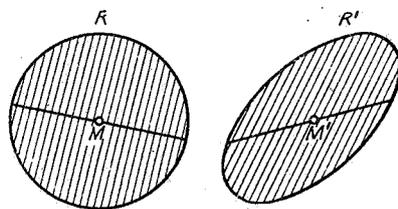


Figura 51

$E$  de los puntos  $x', y', z'$ , un *elipsoide*. Según lo dicho en 3) a un sistema de cuerdas paralelas de la esfera, corresponde otro de cuerdas también paralelas en el elipsoide (fig. 51). Además como las series homólogas son semejantes (4) a los puntos medios de las cuerdas de la esfera, corresponden los puntos medios de las cuerdas del elipsoide, y como aquellos están en un plano, según la propiedad fundamental 2.<sup>a</sup>, también éstos están en un plano que se llama *plano diametral del elipsoide*. Como todos los planos diametrales de la esfera contienen su centro  $M$ , que biseca todas las cuerdas que pasan por él (*diámetros*), el punto correspondiente  $M'$  (*centro del elipsoide*) también está en todos los planos diametrales y biseca todas las cuerdas que pasan por él (*diámetros del elipsoide*).

Un sistema de tres planos diametrales de la esfera, perpendiculares entre sí, tiene, como es sabido, la propiedad característica de que cada uno de ellos divide en partes iguales a las cuerdas paralelas a la intersección de los otros dos.

Esta propiedad subsiste en la transformación afín, de modo que, a cada una de las infinitas ternas de planos diametrales de la esfera perpendiculares entre sí, le corresponde en el elip-

soide otra terna de planos diametrales con la propiedad de que las cuerdas paralelas a la recta de intersección de cada dos de estos planos, quedan cortadas en partes iguales por el tercero de ellos. Los planos diametrales y los diámetros que forman estas ternas, se llaman *conjugados*.

Los tres ejes de un elipsoide forman, como es sabido, una terna de diámetros conjugados y perpendiculares entre sí; a los cuales corresponden en el espacio  $E$  tres diámetros de la esfera también perpendiculares entre sí. Con objeto de simplificar, podemos tomar dichos diámetros como ejes respectivos de coordenadas en los espacios  $E$  y  $E'$  escogiendo convenientemente el giro, lo que deja a nuestro arbitrio cambiar el espacio o el sistema de coordenadas.

En todo caso, las dos operaciones están representadas por sustituciones de coordenadas, lineales homogéneas, de la naturaleza ya considerada, y como la aplicación sucesiva de varias sustituciones lineales homogéneas equivale a una sustitución de esta especie, las ecuaciones que ligan los espacios  $E$  y  $E'$  de la esfera y del elipsoide, respectivamente, serán también de la forma (2):

$$\begin{aligned}x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z\end{aligned}$$

Para que el eje  $x$  sea homólogo del  $x'$  es preciso que para  $y=z=0$  se verifique  $y'=z'=0$ , de donde:  $a_2=a_3=0$ . Análogamente, tiene que ser  $b_1=b_3=c_1=c_2=0$ . Puede, pues, decirse que, *aparte giros convenientes, toda afinidad no es otra cosa que una «afinidad pura»*:

$$\left. \begin{aligned}x' &= \lambda x \\y' &= \mu y \\z' &= \nu z\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

siendo

$$\Delta \geq 0$$

o, como dicen los físicos, una *deformación homogénea pura* (en inglés: *pure strain*).

Estas ecuaciones pueden interpretarse geoméricamente, diciendo :

Por esta transformación, el espacio  $E$  experimenta una dilatación paralela al eje  $x$ , de coeficiente  $\lambda$  (una compresión cuando es  $|\lambda| < 1$ ), siendo una simetría si  $\lambda < 0$ ; y, análogamente respecto de los ejes  $y$ ,  $z$ , y coeficientes  $\mu$  y  $\nu$ , respectivamente; podemos, pues, designar, abreviadamente, la afinidad pura como dilatación uniforme del espacio en tres direcciones perpendiculares entre sí, lo cual da una representación geométrica tal que difícilmente se encontrará otra más intuitiva.

Supongamos ahora que se emplean *coordenadas cartesianas oblicuas* en vez de rectangulares.

Sin cambiar de origen de coordenadas, tomemos en el espacio  $E$  un sistema de ejes cualesquiera, rectangulares u oblicuos,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y como ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , en  $E'$  las rectas homólogas de las  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en la afinidad. Las fórmulas de transformación de coordenadas rectangulares a oblicuas, sin cambiar de origen, son ecuaciones lineales homogéneas de la forma (2) y como la composición de sustituciones de esta naturaleza conduce a una sustitución de la misma especie, las ecuaciones de la afinidad deben tener la misma forma (2) cuando se utilice el sistema de coordenadas oblicuas fijado. Pero, según lo dicho, los tres ejes de  $E$  se transforman en los tres de  $E'$  y, por consiguiente, repitiendo los razonamientos anteriores podemos concluir que las ecuaciones pueden, efectivamente, reducirse a la forma (6). Así, pues, *siempre que se utilicen coordenadas cartesianas (oblicuas) y las ternas de ejes sean correspondientes, puede asegurarse que las ecuaciones de la afinidad tienen la forma particular sencilla (6).*

Como aplicación de lo expuesto, puede considerarse el problema de encontrar un mecanismo que permita realizar transformaciones afines. Este problema fué propuesto en un curso sobre Mecánica, explicado por el autor en 1908 a 1909. La mejor solución, tanto desde el punto de vista de su fundamento teórico como respecto a la realización técnica del mecanismo, es la debida a *R. Remak*. El elemento cinemático fundamental utilizado por Remak, es el llamado «tijera de Nuremberg», constituido por una cadena de varillas articuladas que forman una serie de

paralelogramos semejantes (fig. 52). Los vértices  $S_0, S_1, S_2, \dots$  comunes a cada dos de estos paralelogramos sucesivos describen, en todas las deformaciones del sistema articulado, *series semejantes situadas* en su recta de unión  $g$ . Si con tres tijeras de estas condiciones se forma un triángulo articulado cada dos en

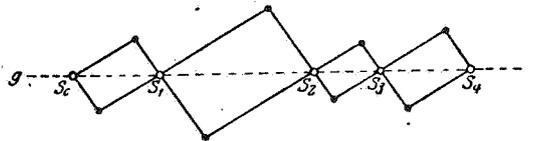


Figura 52

uno cualquiera de sus vértices,  $S$ , el sistema de puntos formado por todos los centros de articulaciones  $S$  experimenta una transformación afín en toda variación del sistema articulado total; lo cual se reconoce inmediatamente (fig. 53), sin más que tomar como ejes coordenados cartesianos las diagonales de dos de las tijeras.

Se obtienen otros puntos que al mismo tiempo experimentan la misma transformación afín tendiendo entre dos articulaciones

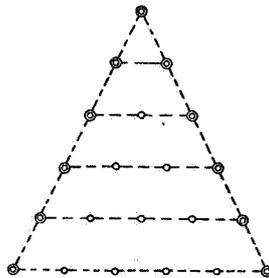


Figura 53

cualesquiera del triángulo otras tijeras de la misma especie y considerando sus puntos de articulación  $S$  (en la figura se representan las tijeras por sus rectas diagonales). Partiendo de este principio, se pueden construir los modelos más variados, planos y también de tres dimensiones para sistemas afines variables (\*).

(\*) Una colección de estos modelos ha sido construída por la casa editorial de Martín Schilling, de Leipzig. Véase: *F. Klein y Fr. Schilling, Modelle zur Darstellung affiner Transformationen in der Ebene und in Raum, Zeitsch für Math. u. Physik, Bd. 58, pág. 311.*

Dejando ya el examen de las propiedades de afinidades, vamos a ver cómo pueden utilizarse.

Comencemos por un ejemplo que pone de relieve cómo estas transformaciones constituyen un valioso recurso para la deducción de nuevos teoremas geométricos; la transformación afín de la esfera en un elipsoide permite, en efecto, encontrar nuevos teoremas sobre el elipsoide, partiendo de propiedades conocidas de la esfera. Tracemos, por ejemplo, tres diámetros de la esfera, perpendiculares entre sí, y los planos tangentes en sus seis extremos; se forma así un cubo circunscrito de la esfera, de volumen  $V=8r^3$ , designando por  $r$  el radio de la esfera. Nuestra transformación afín, hace corresponder a cada plano tangente a la esfera uno tangente al elipsoide, y por consiguiente, a

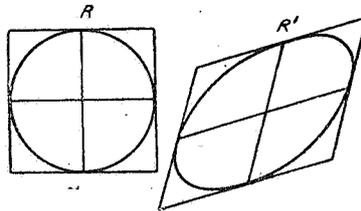


Figura 54

aquel cubo, del espacio  $E$ , corresponde en el espacio  $E'$  un paralelepípedo circunscrito al elipsoide, cuyas caras son tangentes en los extremos de tres diámetros, conjugados dos a dos, y paralelos a los planos diametrales correspondientes, y cuyas aristas son respectivamente paralelas a aquellos diámetros (cosa análoga ocurre en el plano entre circunferencia y elipse (véase la figura 54). La propiedad recíproca es cierta: A todo paralelepípedo de las condiciones indicadas, circunscrito al elipsoide, corresponde un cubo circunscrito a la esfera, puesto que a toda terna de diámetros conjugados del elipsoide corresponde una terna de diámetros, perpendiculares entre sí, de la esfera. Ahora bien, sabemos (pág. 96) que en la afinidad, todo volumen se transforma en su producto por el determinante de la sustitución (y, por consiguiente, el volumen,  $V'$  de todo paralelepípedo circunscrito a un elipsoide y cuyas aristas son paralelas a tres diámetros conjugados de éste es):

$$V' = V \cdot \Delta = 8r^3 \cdot \Delta.$$

Esta fórmula no depende, evidentemente, de la posición del paralelepípedo; por tanto, el paralelepípedo tiene siempre el mismo *volumen constante*, cualquiera que sea la terna de diámetros conjugados paralelos a sus aristas. Considerando, en particular, la terna de los ejes, se obtiene un paralelepípedo rectangular recto, cuyo volumen es  $8abc$ , designado por  $2a$ ,  $2b$  y  $2c$  las longitudes de los ejes del elipsoide. Tenemos, pues, así determinado el valor constante de aquel volumen y podemos enunciar el teorema: *Todos los paralelepípedos circunscritos a un elipsoide, cuyas aristas sean paralelas a tres diámetros conjugados entre sí, tienen el mismo volumen  $V = abc$ , siendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  las longitudes de los semiejes del elipsoide.* Para reconocer la validez general de este teorema para cualquier elipsoide, falta probar que *todo* elipsoide puede deducirse de una esfera por medio de una transformación afín. Esto resulta inmediatamente de la forma (6) de las ecuaciones de la afinidad, que enseña que los ejes del elipsoide en que se transforma una esfera, están en las razones  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , siendo  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  números arbitrarios.

Las transformaciones afines tienen también una extraordinaria importancia en la práctica, sobre todo en la *teoría de la elasticidad*, en la *Hidrodinámica*, y, en general, en todas las ramas de la *Mecánica, de los medios continuos*.

Y no hace falta insistir sobre esto, pues todo el que ha tenido que ocuparse en alguna de estas disciplinas, por poco que haya sido, sabe que en toda consideración que se limita a elementos de espacio suficientemente pequeños, intervienen las deformaciones lineales homogéneas.

Sobre la aplicación que sí hemos de detenernos es la del *dibujo correcto* que utilizan físicos y matemáticos, *pues todo lo que a proyecciones paralelas se refiere, está basado en transformaciones afines del espacio*. Desgraciadamente, hoy se concede tan poca atención al dibujo, que tanto en tratados de Matemáticas como de Física se encuentran errores de representación en figuras y aparatos verdaderamente increíbles. Uno de los errores más frecuentes es representar el ecuador de una esfera por medio de dos arcos de circunferencia (fig. 55, parte de la izquierda), en vez de hacerlo por una elipse, que como más adelante veremos, es la representación correcta.

El principio fundamental del dibujo geométrico correcto, consiste en proyectar la figura que ha de representarse, desde un punto exterior, sobre el plano del dibujo. El modo más sencillo de hacerlo es elegir como centro de proyección de un punto del infinito, con lo cual las rectas proyectantes *forman una radiación de rayos paralelos*. Este es el caso que aquí más nos

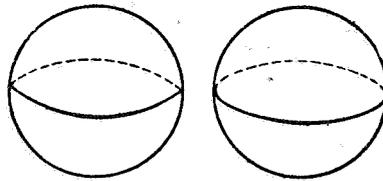


Figura 55

interesa y por ello vamos a hacer su estudio, aunque sea sin pretender la exposición sistemática de toda la Geometría descriptiva, sino limitándonos a marcar el lugar que a esta disciplina corresponde entre los conocimientos generales de la Geometría, prescindiendo por ello, a veces, de las demostraciones.

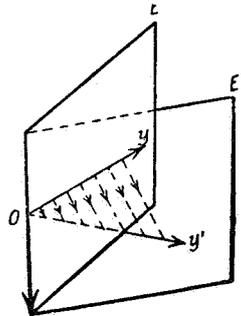


Figura 56

Supongamos, en primer lugar, que se quiere obtener la representación de una figura plana, es decir, *la proyección de un plano E sobre otro E' por medio de una radiación de rectas paralelas*. Conviene para ello escoger como eje  $x$  la recta común a ambos planos (fig. 56), y como eje  $y$  una recta cualquiera, por ejemplo, perpendicular a la  $x$  contenida en el plano E. Tomaremos como eje  $y'$  la proyección de  $y$  sobre  $E'$  efectuada en dirección dada, de modo que, en general, se tendrá en  $E'$  un sis-

tema de coordenadas oblicuas. Las coordenadas de dos puntos homólogos estarán entonces enlazadas por las relaciones

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= \mu \cdot y\end{aligned}$$

donde  $\mu$  es una constante que depende de la posición relativa de los planos dados y del haz de rayos paralelos proyectante. Estas fórmulas nos dicen que la *transformación es una afinidad* que puede también obtenerse como caso particular de las (6), haciendo en ellas  $\lambda=1$ , de donde resulta  $x=x'$ , cosa natural, pues siendo los ejes  $x$  y  $x'$  la misma recta, todo punto del primero coincide con su proyección.

Las propiedades de esta transformación, se obtienen particularizando para el plano las del caso general; así, por ejemplo, a una circunferencia situada en  $E$ , le corresponde una elipse en  $E'$ , etc., etc.

El problema recíproco del que acabamos de estudiar, puede enunciarse del modo siguiente: *Dadas dos figuras afines sobre  $E$  y  $E'$ , ¿pueden colocarse estos planos de manera que se deduzca una de las figuras de la otra por medio de una proyección paralela?*

Para resolverlo, tomemos una circunferencia cualquiera en el plano  $E$  y la elipse correspondiente en el  $E'$  (en lugar de estas dos curvas, podrían tomarse también dos elipses homólogas cualesquiera).

En este caso, los centros  $M$  y  $M'$  son homólogos en la afinidad de ambas figuras. *Si colocamos la circunferencia sobre el plano de la elipse haciendo coincidir sus centros, las dos curvas se cortarán en cuatro puntos o en ninguno.*

Para mayor sencillez, prescindimos de considerar el caso límite intermedio de ser tangentes las dos líneas.

En el primer caso (fig. 57), a los dos diámetros  $A'A'_1$  y  $B'B'_1$ , que pasan por los puntos comunes en  $E'$  les corresponden en el plano  $E$  dos diámetros de la circunferencia  $AA_1$  y  $BB_1$  iguales a aquéllos, por construcción.

De aquí se sigue, según una propiedad general de las afinidades (pág. 96, núm. 4), que los segmentos homólogos situados en  $AA_1$  y  $A'A'_1$  y en  $BB_1$  y  $B'B'_1$ , son iguales. Colocando ahora el plano  $E$  sobre el  $E'$  de modo que coincidan dos

de estas rectas homólogas, por ejemplo, la  $AA_1$  con la  $A'A'_1$ , y haciendo girar el plano  $E$  alrededor de esta recta, de modo que no coincida con el  $E'$ , tendremos definida una transformación afín entre los dos planos, en la cual son dobles todos los puntos de dicha recta. Se puede entonces demostrar fácilmente que cualquiera que sea el ángulo de los dos planos, las rectas que unen puntos homólogos en esta afinidad son paralelas, es decir, que la afinidad entre los dos planos puede, en efecto, engendrarse por proyección paralela.

Si la circunferencia y la elipse no se cortan, los diámetros comunes son imaginarios (empleando el lenguaje del Análisis) y para el que dibuja no existen, de modo que la construcción

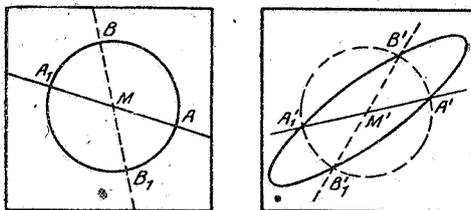


Figura 57

anterior es imposible. Este caso puede, sin embargo, reducirse al anterior con el auxilio de una transformación de semejanza que permita pasar de la circunferencia a otra mayor o más pequeña, que corte a la elipse; esta transformación es la que se emplea cuando se quiere reproducir un dibujo a una escala dada. Se llega, pues, aplicando el principio, a este teorema general: Toda correspondencia afín entre dos planos puede obtenerse de infinitos modos, combinando una semejanza y una proyección paralela.

Mucho más importante que la representación de un plano sobre otro es la de las figuras del espacio sobre un plano por proyección paralela; al hacerlo, supondremos desde ahora, para evitar inconvenientes que pudieran presentarse, que siempre puede combinarse esta representación con una semejanza que produzca una ampliación o una reducción del dibujo.

Se obtiene así el sistema que en Geometría descriptiva se conoce con el nombre de Axonometría, cuya importancia en la práctica es extraordinaria.

Toda fotografía es, aproximadamente, una representación axonométrica, si el objeto presentado estaba suficientemente alejado de la cámara fotográfica (en realidad la fotografía es una proyección cónica).

En los libros se utiliza este método para representar figuras geométricas del espacio, aparatos de física, trozos arquitectónicos, etc. Un tratado que contiene interesantes ejemplos de representación axonométrica es el de *O. Pressler*, titulado *Leifaden der Projektionslehre* y *C. H. Müller* (\*).

La conexión íntima que existe entre las formas afines y la proyección axonométrica, se pone de manifiesto con el siguiente teorema: *La representación plana del espacio por medio de proyecciones paralelas y transformaciones de semejanza (axonometría) equivale analíticamente a una transformación afín, cuyo determinante es nulo:*

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \right\} (1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Este es precisamente, el caso de excepción, cuya consideración habíamos aplazado; y así se ve lo importante de estas transformaciones «degeneradas», que, desgraciadamente, no suelen tratarse en los cursos corrientes.

Recíprocamente, *toda sustitución de esta especie con  $\Delta = 0$ , equivale a una representación axonométrica.* Para que este recíproco se verifique, es preciso, como puede verse fácilmente después de la demostración, que no sean nulos todos los coeficientes, ni todos los menores de segundo orden de  $\Delta$ , pues entonces resultan otras «degeneraciones», cuya naturaleza se reconoce fácilmente.

Para demostrar el teorema comenzaremos probando que *todos los puntos  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  obtenidos mediante la sustitución (1) (siendo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  arbitrarios), están en un plano;* es decir, que existen tres números  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , tales que se verifica idénticamente:

$$k_1 x' + k_2 y' + k_3 z' = 0 \quad (2)$$

(\*) Leipzig, 1903.

En efecto, esta identidad equivale a las tres ecuaciones lineales homogéneas:

$$\left. \begin{aligned} k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0 \\ k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0 \\ k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

que, como es sabido, determinan las razones  $k_1 : k_2 : k_3$  cuando  $\Delta$  es nulo, sin que lo sean todos sus nueve menores. Los puntos  $x', y', z'$  están, por consiguiente, en el plano (2) determinado por las ecuaciones (2').

Tomando este plano como  $x'y'$  en un nuevo sistema de coordenadas rectangulares del espacio  $E'$  a todo punto del espacio  $E$  le debe corresponder en el  $E'$  uno, para el cual sea  $z=0$ , con lo cual, las ecuaciones de la afinidad deben tener la forma:

$$\left. \begin{aligned} x' &= A_1 x + B_1 y + C_1 z \\ y' &= A_2 x + B_2 y + C_2 z \\ z' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde las seis constantes  $A_1, \dots, C_2$  son completamente arbitrarias, puesto que por la forma especial de la última fila, el determinante  $\Delta$  es nulo; sin embargo, no deben serlo simultáneamente sus tres menores (es decir, no debe ser  $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$ ) porque si así ocurriese, estaríamos en el caso de la degeneración excluida al principio.

Al mismo tiempo que demostramos la identidad de la representación del espacio  $E$  sobre el plano  $E'$ , definida analíticamente con la proyección axonométrica, antes definida, iremos indicando las propiedades más importantes de esta última, análogamente a como hicimos al tratar de las afinidades de determinante no nulo.

1.º En primer lugar, es evidente que a todo punto  $x, y, z$ , de  $E$ , le corresponde uno sólo  $x', y'$  en  $E'$ .

Recíprocamente; si tomamos un punto  $x', y'$  en  $E'$ , las ecuaciones (3) nos dicen que su homólogo  $x, y, z$  en  $E$  debe pertenecer a dos determinados planos, que no pueden ser paralelos, a causa de la hipótesis que hemos hecho de que sus coeficientes no son proporcionales. El punto  $x', y'$  tiene,

pues, por homólogos, todas las de la recta propia de intersección de ambos planos. Ahora bien, si hacemos variar dicho punto, los dos planos variarán también, pero siempre conservándose paralelos a sus posiciones primitivas, porque los coeficientes  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  son invariables; luego, las rectas comunes a cada dos de estos planos, serán igualmente paralelas entre sí; resulta, pues, que *a cada punto del plano  $E'$  le corresponden todos los de una recta que forma parte de un sistema doblemente infinito de paralelas en el espacio  $E$ .*

Con ello queda demostrado que la transformación (3) equivale a una proyección paralela.

2.º Del mismo modo que ocurría en la afinidad general, a las componentes  $X, Y, Z$  de un vector libre de  $E$ , corresponden en  $E'$  los segmentos  $X', Y'$  dados por las fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} X' &= A_1 X + B_1 Y + C_1 Z \\ Y' &= A_2 X + B_2 Y + C_2 Z \\ Z' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

lo cual prueba que también *a cada vector de  $E$  corresponde otro vector  $X', Y'$ , en el plano de representación*, o dicho más precisamente: si un segmento del espacio  $E$  se desplaza paralelamente a sí mismo conservando su longitud y sentido, lo mismo ocurre con su segmento homólogo en el plano  $E'$ .

3.º Consideremos, en particular, el *vector unidad*  $X=1, Y=Z=0$ , situado en el eje  $x$ , que va del origen  $0, 0, 0$  al punto  $1, 0, 0$ . Su homólogo en  $E'$  es, según (4), el vector

$$X' = A_1, \quad Y' = A_2$$

que va del origen  $O'$  al punto de coordenadas  $x' = A_1, y' = A_2$ . Análogamente, a los vectores unidad de los ejes  $y$  y  $z$ , les corresponden los que tienen por extremos del origen  $O'$  y los puntos  $B_1, B_2$  y  $C_1, C_2$ , respectivamente. Estos tres vectores, que para abreviar llamaremos  $(A), (B)$  y  $(C)$  (fig. 58), pueden ser tomados arbitrariamente, porque las coordenadas de sus extremos determinan los seis parámetros de las ecuaciones (3) de la afinidad. La única condición que han de cumplir, es *que no estén los tres en línea recta*; pero estudiaremos sólo el caso más sencillo, en que los tres estén en rectas distintas.

Los tres vectores unitarios situados sobre los ejes coordenados de  $E$  están, pues, representados—y éste es el resultado—por tres vectores arbitrarios de origen  $O'$  trazados en  $E'$ , los que, a su vez, determinan completamente la afinidad.

4.º Para establecer, también geoméricamente, la representación de  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  partamos primero de la consideración de un punto  $p(x, y, 0)$ , cualquiera del plano  $xy$ . El vector determinado por el origen  $O$  y el extremo  $p$ , se obtiene multiplicando el vector unidad del eje  $x$  por el número escalar  $x$ , el del eje  $y$  por

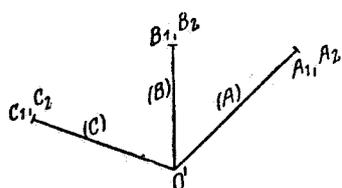


Figura 58

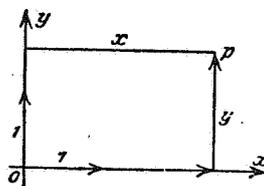


Figura 59

el número  $y$ , y sumando ambos productos (fig. 59). La construcción correspondiente a ésta en el plano  $E'$  se obtiene en seguida por medio de una afinidad bidimensional ordinaria (con determinante distinto de cero), y resulta así el punto  $p'$  homólogo del  $p$ , se deduce como resultado de multiplicar el vector  $(A)$  por  $x'$ , el  $(B)$  por  $y'$ , y construir el paralelogramo que da la suma de

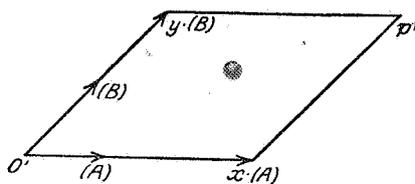


Figura 60

estos dos productos (fig. 60). De este modo puede determinarse en  $E'$  el homólogo de cualquier punto del plano  $xy$  y dada una figura cualquiera, construir punto a punto su correspondiente.

5.º Repitiendo el mismo razonamiento para un punto del espacio de tres dimensiones,  $E$ , resulta (fig. 61) que todo punto  $p$ , de coordenadas  $x, y, z$ , tiene por homólogo el  $p'$  obtenido sumando, por la regla del paralelogramo, los productos de los vectores  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  por los números  $x, y, z$ . Como la adición

es conmutativa, esta construcción se puede efectuar de  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  modos diferentes, cuyo conjunto constituye la representación plana (fig. 61) de un paralelepípedo rectangular del espacio  $E$  formado por los tres puntos coordenados y los paralelos a ellos trazados por el punto  $p$ . La costumbre de ver estos dibujos desde que se comienzan los estudios matemáticos, hace que esta representación se considere como una cosa trivial, aunque en su esencia constituya un importante teorema.

6.º Por medio de esta construcción, se puede representar en el plano  $E'$  cualquier figura del espacio. Sea, por ejemplo, una esfera de radio igual a la unidad y con el centro en el origen de coordenadas; fijémonos en los círculos de intersección con los planos coordenados.

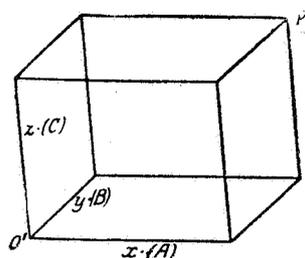


Figura 61

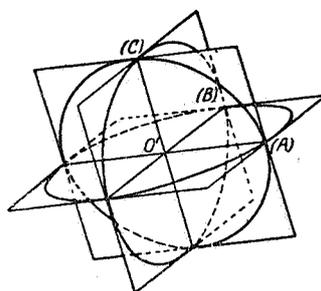


Figura 62

La circunferencia sección por el plano  $xy$ , tiene por diámetros conjugados los vectores unitarios de  $x$  e  $y$ , y por consiguiente, le corresponde en  $E'$ , en virtud de la afinidad, una elipse (fig. 62) con centro en  $O'$ , en la que son semidiámetros conjugados los vectores  $(A)$  y  $(B)$ , y que, por tanto, está inscrita en el paralelogramo formado por los vectores  $2(A)$  y  $2(B)$ . Análogamente ocurre con las circunferencias secciones producidas en la esfera por los otros dos planos coordenados; sus representaciones son elipses de centro  $O'$  y semidiámetros conjugados  $(B)$ ,  $(C)$  y  $(A)$ ,  $(C)$ .

7.º El estudio de las relaciones que existen entre la proyección axonométrica y la afinidad, se completa con el *teorema fundamental de la Axonometría*, enunciado en 1853 por *K. Pohlke*, profesor de la *Banakademie* de Berlín y publicado en su

«Tratado de Geometría descriptiva» (\*). La primera demostración elemental de este teorema se debe a N. A. Schwarz y está incluida en un trabajo publicado en 1863, junto con la interesante historia de su descubrimiento (\*\*).

Pohlke definía la Axonometría geoméricamente, como medio de representar las figuras del espacio, mediante una proyección paralela y una semejanza. Su teorema dice que *los tres vectores unidad, de los ejes coordenados del espacio, pueden ser transformados por medio de una representación de esta índole, en tres vectores ARBITRARIOS del plano E', con origen común en el de coordenadas O'*. Esta afirmación la hemos demostrado ya, partiendo de la definición analítica de la afinidad; para nosotros, la importancia del teorema de Pohlke radica en que *la representación definida analíticamente por las ecuaciones (3) (página 107) se obtiene geoméricamente por medio de una proyección paralela y un cambio de escala*; las rectas paralelas de que hablamos en el número 1.º son entonces los rayos proyectantes.

8.º Para demostrar analíticamente de un modo directo el teorema de Pohlke consideremos en el espacio  $E$  los dos haces de planos paralelos definidos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= \xi \\ A_2x + B_2y + C_2z &= \eta \end{aligned}$$

en las que  $\xi$ ,  $\eta$  son parámetros variables.

Cada par de valores de los parámetros  $\xi$ ,  $\eta$  determina un par de planos que se cortan en una de las rectas paralelas, últimamente recordadas. El problema se reduce, pues, a fijar en el espacio un plano  $E'$  y en éste un sistema de coordenadas rectangulares  $x'$ ,  $y'$ , tal que cada una de estas rectas ( $\xi$ ,  $\eta$ ) corte al plano  $E'$  en el punto  $x'=\xi$ ,  $y'=\eta$ .

Para ello es preciso en primer lugar, que los planos  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  corten al  $E'$  en los ejes de coordenadas  $O'y'$  y  $O'x'$ , es decir, en dos rectas perpendiculares. Llamemos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos que estos ejes (que determinan la posición de  $E'$ ) forman con la

(\*) *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. 2. Abteil. 4. Auflage. El teorema está en la primera parte, pág. 109.

(\*\*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Bol. 63, página 309. *Jesamte mathematische Abhandlungen*. Bol. II, pág. 1, Berlin, 309.

recta  $\xi=\eta=0$  (fig. 63) y  $\alpha$  el ángulo, conocido, de los planos  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ . Aplicando el teorema del coseno de la Trigonometría esférica, al triedro formado por estos dos planos  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  y el  $E'$ , resulta:

$$\cos [O'x', O'y'] = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \cos \alpha$$

y dividiendo por  $\text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2$

$$\frac{\cos [O'x', O'y']}{\text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2} = \cot \theta_1 \cot \theta_2 + \cos \alpha$$

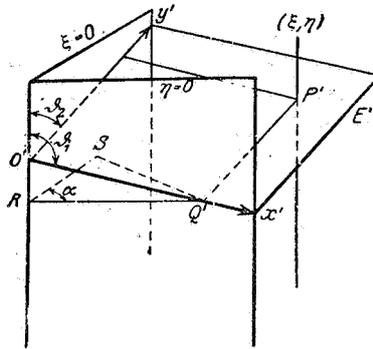


Figura 63

Para que el ángulo de  $O'x'$  con  $O'y'$  sea recto, es preciso que su coseno sea nulo, luego

$$(a) \quad \cot \theta_1 \cot \theta_2 = -\cos \alpha$$

Todo plano de los

$$A_1x' + B_1y' + C_1z = \xi$$

corta al  $E'$ , según una recta  $x'=\text{constante}$ . Si  $Q'$  es la abscisa del punto en que ésta corta al eje  $x'$  el valor correspondiente de  $x'$  en  $E'$  es igual a  $O'Q'$ , salvo un factor  $\lambda$ , dependiente de la escala, que es preciso determinar; trazando la perpendicular  $Q'S$  al plano  $\xi=0$  y la  $Q'R$  a la recta  $\xi=\eta=0$ , se verifica

$$O'Q' = \frac{Q'R}{\text{sen } \theta_1} \quad Q'R = \frac{Q'S}{\text{sen } \alpha}$$

y teniendo en cuenta que  $Q'S$  es la distancia entre los planos  $A_1x + B_1y + C_1z = 0$  y  $A_1x + B_1y + C_1z = \xi$ , resulta

$$x' = \lambda \cdot O'Q' = \lambda \frac{\xi}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \alpha}$$

De un modo análogo se obtiene como coordenada  $y'$  de los puntos situados en la intersección del plano  $A_2x + B_2y + C_2z = \eta$  con el  $E'$ :

$$y' = \lambda \cdot \frac{\eta}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \text{sen } \alpha}$$

Las dos últimas relaciones nos dicen que para que la recta determinada por los parámetros  $\xi$ ,  $\eta$  corte al plano  $E'$  en el punto  $x' = \xi$ ,  $y' = \eta$ , es preciso que sea

$$(b) \quad \lambda = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \alpha = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \cdot \text{sen } \theta_2 \cdot \text{sen } \alpha$$

de donde resulta la siguiente ecuación de condición para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$(c) \quad \text{sen } \theta_1 \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = \text{sen } \theta_2 \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$$

Un sencillo cálculo, demuestra que el sistema formado por las ecuaciones (a) y (c) tiene una solución única real para  $\cot \theta_1$  y  $\cot \theta_2$  salvo el signo; es decir: *Existe una sola posición (y su simétrica respecto del plano normal común a  $\xi=0$  y  $\eta=0$ ), para la cual se verifica axonométricamente la afinidad  $n'=\xi$ ,  $y'=\eta$ .* La constante de semejanza que proporciona la escala del sistema de coordenadas de  $E'$ , está dada por la ecuación (b).

Puede darse a esta demostración un carácter más geométrico, partiendo de la condición de que los puntos unidad de los ejes  $x'$  e  $y'$  estén en las rectas  $\xi=1$ ,  $\eta=0$  y  $\xi=0$ ,  $\eta=1$ , respectivamente. En este caso, el problema consiste en buscar un plano  $E'$ , tal que corte a un prisma triangular dado, según un triángulo rectángulo isósceles.

*Recíprocamente, toda proyección axonométrica representa una transformación afin cuyo determinante es nulo.* Esto es fácil de comprobar, transformando por medio de una sustitución lineal, como se hizo antes (pág. 107), el sistema de coordenadas oblicuas que la proyección de los ejes  $x$  e  $y$  da sobre el plano  $E'$ , en un sistema de coordenadas rectangulares elegido de antemano también en  $E'$ .

Las propiedades de la proyección axonométrica se pueden hacer ver intuitivamente utilizando una linterna de proyección con el foco suficientemente alejado de la pantalla para que se pueda suponer que está en el infinito. Colocando en el haz de luz diversos modelos (cuadrado, círculo, cubo, elipse, etc.), se ve que las figuras de las sombras confirman los resultados obtenidos matemáticamente. El teorema de Pohlke se comprueba también por medio de tres varillas unidas en forma de triedro trirrectángulo; haciendo mover convenientemente este modelo y el plano de proyección se puede obtener cualquier posición fijada de antemano para las sombras.

## II. Transformaciones proyectivas

Consideramos, desde luego, figuras tridimensionales:

1.º Para definir analíticamente las transformaciones proyectivas no se expresan ya  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  como funciones enteras de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , sino como *funciones racionales del mismo denominador* (esta circunstancia última es esencial):

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ y' &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ z' &= \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Estas ecuaciones nos dicen que a todo punto  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , le corresponde otro punto  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , que es propio si el denominador no es nulo. En cambio, si el punto  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , se acerca al plano  $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$ , el punto homólogo  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , se aleja infinitamente (cosa que no ocurre en la afinidad), y, en cierto modo, puede decirse que se «desvanece»; por esta razón dicho plano se llama *plano de desvanecimiento* (\*), sus puntos, *puntos de desvanecimiento*, y se dice que corresponden en la

(\*) En España son más corrientes estas denominaciones que las de *plano y puntos de fuga*, también usadas, traducciones literales de *Fluchtbene* y *Fluchtpunkte*. (N. del T.)

transformación proyectiva al plano y puntos impropios o del infinito.

2.º Para estudiar estas transformaciones es muy conveniente emplear *coordenadas homogéneas*; es decir, usar en lugar de las tres coordenadas  $x, y, z$ , cuatro magnitudes  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , definidas por las relaciones:

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau}.$$

Estas cuatro cantidades deben ser finitas, variar independientemente y no anularse todas simultáneamente. A todo punto  $x, y, z$ , corresponden, pues, infinitos sistemas de valores  $\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta, \rho\tau$  (siendo  $\rho$  un factor arbitrario distinto de 0), y recíprocamente, todo sistema de valores  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , siendo  $\tau$  diferente de cero, determinan un punto propio  $x, y, z$ , y este mismo punto corresponde a todos los sistemas de valores  $\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta, \rho\tau$ . Cuando  $\tau$  es nulo, uno, por lo menos, de los cocientes  $x, y, z$ , se hace infinito y el punto es impropio; así, pues, *todo sistema de valores  $\xi, \eta, \zeta, \tau=0$  representa un punto del infinito*, que es el mismo para todos los sistemas  $\rho\xi, \rho\eta, \rho\zeta, 0$ , siendo  $\rho$  diferente de cero. Con esto se introducen de manera precisa, analíticamente, los puntos del infinito, cuya consideración se acostumbra agregar a la de los propios, ordinarios.

El empleo de las coordenadas homogéneas, resulta al principio algo incómodo, a causa de la indeterminación de estas cantidades producidas por el factor arbitrario  $\rho$ , y conviene, por lo tanto, precisar un poco más su significado geométrico.

Sea, para ello, un plano  $P$ , cuyos puntos se determinan por sus coordenadas rectangulares

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}$$

Considerando  $\xi, \eta$  y  $\tau$  como *coordenadas rectangulares de un punto en el espacio*, podemos tomar como plano  $P$  el  $\tau=1$  paralelo al  $\xi\eta$ . Uniendo (fig. 64) el punto  $x, y$  de  $P$  con  $O$  por medio de una recta, para todos los puntos de ésta,  $\frac{\xi}{\tau}$  y  $\frac{\eta}{\tau}$  deben ser constantes, y verificarse

$$\frac{\xi}{\tau} = x, \quad \frac{\eta}{\tau} = y$$

puesto que para  $\tau=1$  han de ser  $\xi=x$  y  $\eta=y$ . La introducción de las coordenadas homogéneas equivale, pues, simplemente a la representación del plano  $P$  sobre la radiación que lo proyecta desde el origen  $O$  del espacio tridimensional auxiliar: las coordenadas homogéneas de un punto son las coordenadas, en el espacio, de los puntos del rayo de esta radiación, proyectante del punto; como en esta representación a cada punto en  $P$  le corresponden los infinitos de este rayo, queda así, perfectamente explicada la indeterminación que introduce el factor  $\epsilon$ .

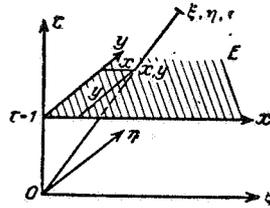


Figura 64

En cuanto al caso de excepción  $\xi=\eta=\tau=0$ , se explica geoméricamente fijándose en que el punto  $O$  por sí solo no determina ningún rayo proyectante, y, por lo tanto, ningún punto de  $P$ .

También es evidente que no es preciso considerar valores infinitos de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ , porque todos los rayos se obtienen uniendo  $O$  con puntos situados a distancia finita. Y, por último, se ve claramente cómo se evitan los valores infinitos de las coordenadas, sin más que sustituir los elementos impropios del plano por los rayos paralelos trazados por  $O$ , situados en  $\tau=0$ .

También la conocida locución de *rectas del infinito* adquiere aquí un contenido geométrico intuitivo. Analíticamente, no es otra cosa que la expresión de la analogía abstracta de que todos los «puntos del infinito» satisfacen a la ecuación lineal  $\tau=0$ , exactamente lo mismo que toda recta propia tiene una ecuación lineal. Pero ahora podemos decir de manera completamente geométrica: a cada recta de  $P$  corresponde en la radiación  $O$  un haz plano de rectas, y, recíprocamente, todo haz plano de rectas de la radiación  $O$  determina una recta en  $P$ , si se exceptúa el haz plano  $\tau=0$ ; parece, pues, conveniente designar también

el conjunto de los puntos que le corresponden en el plano paralelo  $P$  como una recta, y así se tiene la «recta del infinito».

De manera completamente análoga se introducen las coordenadas homogéneas en un *espacio tridimensional* como sección por  $\tau=1$  de un espacio cuatridimensional  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , y relacionándolo con la radiación de rectas que lo proyecta desde el origen de coordenadas del espacio auxiliar.

Podemos entonces extender al caso actual todas las consideraciones anteriores, sin dificultad alguna, dejándonos llevar de la analogía, sin apenas cambiar palabra, y, en particular, las relativas a la significación de los elementos del infinito. Agreguemos, por último, que, naturalmente, la utilización del espacio cuatridimensional es tan sólo un medio de expresión cómodo, al que no hay por qué asociar idea de misterio alguno.

3.º Introduciendo *coordenadas homogéneas en los dos espacios  $E$  y  $E'$* , las ecuaciones [1], de la transformación proyectiva, teniendo en cuenta que todas tienen el mismo denominador, pueden descomponerse en cuatro de la forma :

$$\left. \begin{aligned} \rho' \xi' &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \rho' \eta' &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \rho' \zeta' &= a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\ \rho' \tau' &= a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

en las que  $\rho'$  es un factor de proporcionalidad.

Este sistema, prescindiendo del factor arbitrario  $\rho'$ , constituye la sustitución lineal homogénea de cuatro variables más general, y representa, por lo tanto, una *correspondencia afín entre los dos espacios auxiliares de cuatro dimensiones  $E_4$  y  $E_4'$* , en la cual, las coordenadas homogéneas tienen la significación concreta explicada en el número anterior. Esta interpretación limitada al plano, enseña que la *transformación proyectiva más general de un plano se obtiene proyectando el plano desde el origen de coordenadas de un espacio auxiliar de tres dimensiones, aplicando a la radiación proyectante una transformación afín, y cortando, finalmente, la radiación resultante por el plano dado*.

Efectuando además una transformación de semejanza del espacio, cuyo centro sea  $O$ , determinada por el factor  $\rho'$ , se ob-

tiene la misma proyectividad, porque los rayos proyectantes desde  $O$ , son dobles en la transformación.

El procedimiento que acabamos de utilizar haciendo uso de los espacios auxiliares  $E$  y  $E'$ , recibe el nombre de *principio de las proyecciones y secciones*, y su importancia radica principalmente, en la facilidad con que mediante él se pueden estudiar las más complicadas propiedades en los espacios de  $n$  dimensiones, mediante la consideración de otros espacios auxiliares, de una dimensión más.

4.º Recíprocamente; según enseña la teoría de determinantes, las coordenadas  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  son también funciones lineales y homogéneas de las  $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ , y pueden escribirse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \rho \xi &= a'_1 \xi' + b'_1 \eta' + c'_1 \zeta' + d'_1 \tau' \\ \rho \eta &= a'_2 \xi' + b'_2 \eta' + c'_2 \zeta' + d'_2 \tau' \\ \rho \zeta &= a'_3 \xi' + b'_3 \eta' + c'_3 \zeta' + d'_3 \tau' \\ \rho \tau &= a'_4 \xi' + b'_4 \eta' + c'_4 \zeta' + d'_4 \tau' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

siendo  $\rho$  un coeficiente de proporcionalidad, siempre que no se anule el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Los sistemas de valores  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  y  $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ , se corresponden, pues, biunívocamente salvo los factores arbitrarios de proporcionalidad  $\rho$  y  $\rho'$ . En el caso de que  $\Delta$  sea nulo, y como era de esperar, según lo dicho al hablar de la afinidad, se obtiene una representación del espacio sobre un plano, por medio de una proyección central, tal como ocurre, por ejemplo, en la fotografía. Este caso, que también es sumamente interesante, lo estudiaremos a continuación del general  $\Delta \neq 0$ .

5.º De las ecuaciones [2] y [3], se infiere que siempre que exista una ecuación lineal entre  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , existe también otra entre  $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ , y recíprocamente. A todo plano corresponde, por consiguiente, otro plano. En particular, el plano del infinito de  $E'$  tiene por homólogo, en  $E$ , uno, en general propio, que es el que antes hemos llamado *plano límite*. Esto confirma la

conveniencia de haber generalizado el concepto de plano admitiendo el del infinito, pues así el teorema anterior, como muchos otros, resulta completamente general y sin excepción alguna. Otra consecuencia inmediata es que, *a toda recta le corresponde otra recta*, lo cual puede expresarse con la terminología de Möbius, diciendo que *toda transformación proyectiva es una colineación*.

6) Recíprocamente, *toda colineación del espacio*, es decir, toda transformación unívoca en los dos sentidos que hace corresponder a cada recta otra recta, a cada plano otro plano, y

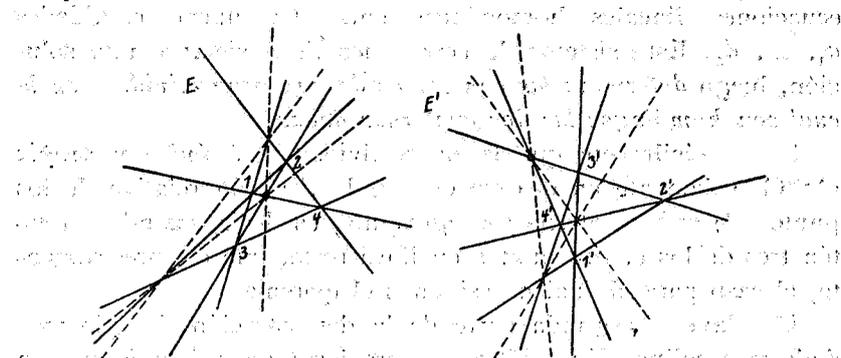


Figura 65

a elementos incidentes otros también incidentes, *es una proyectividad* (esto es, una transformación definida analíticamente por las ecuaciones [1] ó [2]).

Para mayor sencillez, vamos a exponer la demostración de este teorema, dada por Möbius, limitándonos, por razón de comodidad, al caso del plano. El proceso de la demostración es el siguiente: Dada una colineación y elegidas dos cuaternas de puntos homólogos en ella, se demuestra: *a)* que siempre existe una proyectividad que hace corresponder entre sí dos cualesquiera de dichas cuaternas; y, como toda proyectividad es una colineación, bastará probar: *b)* que hay solamente *una* colineación en que las cuaternas se correspondan, con ello quedará completamente probada la identidad entre colineación y proyectividad.

a) Para demostrar la primera parte, observemos que las ecuaciones de la proyectividad en el plano :

$$\begin{aligned}\rho' \xi' &= a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 \tau \\ \rho' \eta' &= a_2 \xi + b_2 \eta + d_2 \tau \\ \rho' \tau' &= a_3 \xi + b_3 \eta + d_3 \tau\end{aligned}$$

contienen  $9-1=8$  constantes, porque el cambio de  $\rho$  no hace variar la transformación. El hecho de que dos puntos sean homólogos da lugar a dos condiciones lineales, luego la correspondencia entre las dos cuaternas está expresada por  $2 \cdot 4=8$  ecuaciones lineales homogéneas entre las nueve cantidades  $a_1, \dots, d_3$ . Este sistema de ecuaciones tiene siempre una solución, luego *determina las constantes de una proyectividad, en la cual son homólogos las dos cuaternas dadas.*

Se ve fácilmente que la proyectividad será *única y propia* ( $\Delta \neq 0$ ), solamente en el caso de que la posición relativa de los puntos de cada cuaterna sea «general», es decir, cuando no estén tres de los cuatro puntos en línea recta, que es, precisamente, el caso para el cual necesitamos el teorema.

b) Para la segunda parte de la demostración, imaginemos dada una colineación arbitraria entre los planos  $P$  y  $P'$  y sean 1, 2, 3, 4, cuatro puntos cualesquiera de  $P$ , tales que no haya tres en línea recta y 1', 2', 3', 4', los correspondientes en  $P'$  que cumplen las mismas condiciones que aquéllos. Se trata ahora de probar, que *la colineación queda unívocamente determinada por la correspondencia entre ambas cuaternas de puntos*, para lo cual bastará demostrar que se puede construir la colineación utilizando la correspondencia biunívoca, y la correspondencia recíproca de las rectas. Como medio auxiliar utilizaremos las llamadas *redes de Möbius* que son sistemas de rectas que cubren el plano a la manera de una telaraña.

Desde luego, las seis rectas que en cada uno de los planos unen los puntos dados dos a dos, son homólogas en la colineación. También se corresponden los puntos de intersección de cada dos de estas rectas. Si unimos ahora estos puntos resultan nuevas rectas homólogas, y continuando este proceso obtenemos en ambos planos, *dos redes cada vez más espesas, que se corresponden punto a punto y recta a recta.*

Dado un punto cualquiera en el plano  $P$ , o es un vértice de la red, o puede considerarse como tal, como posición límite de los vértices a medida que la red se va espesando. En el primer caso, el punto homólogo en  $P'$  está completamente determinado, pero en el segundo no puede decirse lo mismo sin cuidarse al definir la colineación de añadir una condición que para Möbius era tan evidente que no creyó necesario hacer mención expresa de ella. Esta condición es la de *que la transformación sea continua*; es decir, que a todo punto límite de un conjunto de puntos de  $P$ , le corresponde en  $P'$ , el límite del conjunto formado por los homólogos de éstos. De aquí se deduce, entonces, la correspondencia unívoca de los puntos del 2.º caso, y, por tanto, queda demostrado el enunciado para una colineación continua.

Del mismo modo se demuestra que, una colineación continua en los espacios de 3 y, en general, de  $n$  dimensiones, queda determinada cuando se conocen, respectivamente, 5 ó  $n+2$  pares de puntos homólogos.

Teniendo en cuenta ahora, lo que hemos dicho al principio de este número 6.º, podemos enunciar, como resumen, el siguiente teorema: *Las proyectividades son las únicas transformaciones continuas y biunívocas que convierten rectas en rectas, sin excepción.*

7.º En el número 5) hemos dicho que los planos y rectas ilimitados tienen por homólogas en la proyectividad, figuras de la misma especie. En esta propiedad, la transformación proyectiva coincide con la afinidad general, pero no ocurre así en aquellas en que interviene el concepto de paralelismo.

En la proyectividad no se conserva necesariamente el paralelismo, como ocurría en las transformaciones afines, sino que, por el contrario, como al plano del infinito le puede corresponder uno propio que es el llamado límite, al punto del infinito común a dos rectas paralelas, le corresponde el propio determinado por la intersección de sus homólogas con el plano límite. Esto no quiere decir que el concepto de paralelismo pierda su sentido, sino que adquiere mayor amplitud con la adopción del plano del infinito que puede ser considerado como el lugar geométrico de todos los puntos del infinito del espacio. Rectas (o

planos) paralelas, se llamarán entonces aquellas cuya intersección esté situada en este plano especial, con la ventaja de poderse transformar en rectas (o planos) no paralelas por medio de una proyectividad.

Las formas de Grassmann no son invariantes en la transformación proyectiva. Para demostrarlo, sea un vector libre de  $E$ , que tenga por coordenadas:

$$\begin{aligned} X &= x_1 - x_2; & Y &= y_1 - y_2; & Z &= z_1 - z_2 \\ L &= y_1 z_2 - z_1 y_2; & M &= x_2 z_1 - x_1 z_2; & N &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

Las cantidades  $X'$ , ...,  $N'$  homólogas de éstas en el espacio  $E'$  están formadas con

$$x'_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4} \text{ etc.}, \quad x'_2 = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1}{a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4} \text{ etc.}$$

Según esto,  $X'$ , ...,  $N'$ , tomarán la forma de fracciones, cuyos numeradores son combinaciones lineales de  $X$ , ...,  $N$ , con coeficientes constantes mientras que el denominador común:

$$(a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4) (a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4)$$

no puede expresarse en función de  $X$ , ...,  $N$ , únicamente. Las coordenadas del vector libre transformado, no dependen, pues, sólo de las del primitivo, sino también de la posición particular del origen y extremo de éste; de modo que, desplazando el segmento (1, 2) a lo largo de su propia recta,  $X$ , ...,  $N$ , permanecen constantes, sus homólogas  $X'$ , ...,  $N'$  varían: así, pues, *el segmento transformado (1', 2') no es un vector libre, en el sentido dado por Grassmann a este concepto.*

El hecho de que la *recta ilimitada* se conserve en la transformación, se explica porque está determinada únicamente por las razones  $X' : Y' : \dots : N'$ , que en virtud de la desaparición del denominador común, se pueden expresar en función de  $X : Y : \dots : N$ .

8.º Veamos ahora un ejemplo importante de *una figura que se transforma en otra de la misma especie en las transformaciones proyectivas.*

Una ecuación cuadrática en  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , se convierte multiplicando por el cuadrado del denominador común  $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4$ ,

en otra ecuación cuadrática en  $x, y, z$ , lo cual quiere decir, geoméricamente, que a toda superficie de segundo orden, del espacio  $E$ , le corresponde una análoga en el espacio  $E'$ ; cortando por un plano una de estas superficies se obtiene la correspondencia entre curvas de segundo orden. Análogamente, resulta, en general, que toda figura algebraica susceptible de definirse por medio de una o más ecuaciones algebraicas entre las coordenadas, tiene por homóloga en la transformación proyectiva una figura de la misma especie que ella; la naturaleza de estas figuras es, pues, invariante en las transformaciones proyectivas.

9.º Además de estas figuras invariantes, existe también un número especial, cuyo valor no cambia en la proyectividad, y que, en cierto modo, sustituye a los conceptos de distancia y ángulo, cuyos valores ya no son invariantes en las transformaciones afines, y, por tanto, mucho menos en las proyectivas. Fijándonos ahora en el caso de las rectas, se trata de una función determinada de las distancias entre cuatro puntos cualesquiera de una recta 1, 2, 3, 4, la ya citada anteriormente razón doble, o anarmónica, de cuatro puntos,

$$\frac{\overline{12}}{\overline{14}} : \frac{\overline{32}}{\overline{34}} = \frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{14} \cdot \overline{32}}$$

Mediante un sencillo cálculo puede reconocerse la invariancia de esta magnitud en toda transformación proyectiva.

Lo mismo ocurre en un haz de rectas o de planos, en que la razón está formada por los senos de los ángulos que forman, o sea :

$$\frac{\text{sen } (1,2)}{\text{sen } (1,4)} : \frac{\text{sen } (3,2)}{\text{sen } (3,4)} = \frac{\text{sen } (1,2) \cdot \text{sen } (3,4)}{\text{sen } (1,4) \cdot \text{sen } (3,2)}$$

El hecho de que estos invariantes fueran los primeros conocidos en las transformaciones proyectivas, dió lugar a que los geómetras se esforzaran en reducir todos los que sucesivamente se fueron encontrando, a razones dobles; lo cual sólo se conseguía muchas veces de modo artificioso. Más adelante volveremos a ocuparnos de estas relaciones.

El estudio de las figuras invariantes en estas transformaciones, constituye la llamada *Geometría proyectiva*, denominación hoy corriente y mucho mejor que la de *Geometría de la Posición*, muy utilizada antes, para distinguirla de la «*Geometría elemental*» o «*métrica*», porque entre las propiedades invariantes en la proyectividad, hay algunas, como acabamos de ver, de carácter métrico.

Vamos ahora a decir algo acerca de las *aplicaciones de las transformaciones proyectivas*.

1.º Comencemos por hablar de la *Geometría descriptiva*, y prescindiendo de toda sistemática nos fijaremos en algunos ejemplos característicos:

a) *Representación plana del espacio por medio de una perspectiva central*. Este método puede considerarse como una ge-

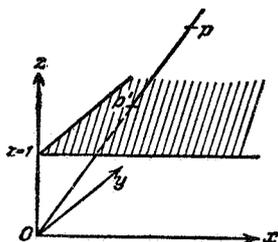


Figura 66

neralización del axonométrico (perspectiva paralela), en que en vez de ser paralelos los rayos proyectantes pasan todos por un mismo punto.

Tomemos como centro el origen de coordenadas, y como plano de representación el  $z=1$ . A todo punto  $p(x, y, z)$  le corresponde otro  $p'(x', y', z')$  para el cual es  $z'=1$ , y como ambos están en el mismo rayo proyectante, se verifica que

$$x' : y' : z' = x : y : z$$

De aquí resultan las ecuaciones de la transformación que son:

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}, \quad z' = \frac{z}{z}$$

Este es, pues, un caso particular de la proyectividad, y la

analogía con la proyección axonométrica, permite sospechar que, en aquélla, *el determinante es nulo*. En efecto, las ecuaciones anteriores, en coordenadas homogéneas, toman la forma :

$$\left. \begin{array}{l} \rho' \xi' = \xi \\ \rho' \eta' = \eta \\ \rho' \zeta' = \zeta \\ \rho' \tau' = \tau, \end{array} \right\}$$

y el determinante de la sustitución es :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Las propiedades de la proyección central pueden deducirse fácilmente de las de la afinidad, aprovechando esta analogía, y teniendo en cuenta que el homólogo de un plano viene dado por una transformación proyectiva bidimensional de determinante distinto de cero.

De aquí se sigue, en particular, que, por ejemplo, las razones dobles de cuatro puntos de una serie o de cuatro rectas de un haz son invariantes en la transformación.

b) El segundo ejemplo lo constituye la llamada *perspectiva relieve*, que comprende como caso límite la proyección central. Una *imagen en relieve* de un objeto es una figura tal, que los rayos luminosos emitidos por sus diferentes puntos, que pasan por el ojo de un observador, situado en un cierto punto, producen en el observador el mismo efecto que lo harían los emitidos por el objeto original.

Elijiendo convenienteente el sistema de coordenadas, todo punto y su imagen estarán alineadas con el origen, luego :

$$x' : y' : z' = x : y : z \quad (1)$$

La diferencia respecto del caso precedente es que aquí el espacio no queda representado sobre un plano, sino sobre una porción de espacio de un ancho limitado.

Las fórmulas de la transformación (son:

$$x' = \frac{(1+k)x}{z+k}, \quad y' = \frac{(1+k)y}{z+k}, \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

que, desde luego, representan una colineación y satisfacen evidentemente a las ecuaciones (1). Para formar su determinante, basta escribirlas en coordenadas homogéneas, o sea, en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \xi' &= (1+k) \xi \\ \rho' \eta' &= (1+k) \eta \\ \rho' \zeta' &= (1+k) \zeta \\ \rho' \tau' &= \zeta + k \tau \end{aligned} \right\}$$

de donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k(1+k)^3$$

que es distinto de cero, salvo en los casos de ser  $k=0$ , ó  $k=-1$ .

Para  $k=0$ , las fórmulas (2) se transforman en las de la proyección central, y el relieve desaparece. Para  $k=1$ , se obtiene  $x': y': z'=0$ ; es decir, todos los puntos del espacio se transforman en el origen de coordenadas, caso trivial de degeneración, sin importancia alguna.

Supongamos, pues, que  $k > 0$ . Todo plano de ecuación  $s=\text{constante}$  se transforma en el

$$z' = \frac{(1+k)z}{z+k} \tag{3}$$

La correspondencia establecida entre ambos planos es evidentemente la originada por la radiación de centro  $O$  al cortar los, y no hay que examinar sino la significación de la fórmula (3).

Para  $s=\infty$  (o sea  $\tau=0$ ), esta ecuación se convierte en  $z'+1+k$ , lo cual quiere decir que el plano paralelo al  $xy$  a

la distancia  $1+k$ , es el límite del espacio transformado, y forma, como si dijéramos, el fondo del relieve sobre el cual aparecen representados los puntos del infinito del espacio primitivo.

Como para  $z=1$ , se obtiene también  $z'=1$ , el plano representado por esta ecuación es doble, es decir, coincide con su imagen. Si  $z$  crece desde 1 hasta  $\infty$ ,  $z'$  crece desde 1 hasta  $1+k$ ; es decir, que limitándose a los objetos situados detrás del plano  $z=1$  (fig. 67), se obtiene como imagen un relieve de

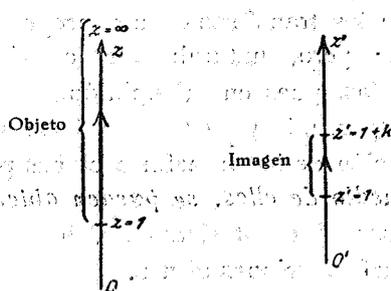


Figura 67

fondo finito  $k$ . Esta limitación debe, pues, tenerse en cuenta en la práctica, y así se hace efectivamente.

De la ecuación (3) se deduce, para valor de la razón doble de los puntos  $z, 1, z', 0$ :

$$\frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{z'-0}{z'-1} = \frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{(1+k)z}{k(z-1)} = \frac{1+k}{k}$$

de modo que, en general, puede decirse de una manera general que se corresponden todos aquellos puntos  $z$  y  $z'$ , que forman con los 1 y 0 una razón doble de valor fijo.

En la colección de modelos matemáticos, hay uno que es la perspectiva relieve de una esfera sobre un cubo, un cono de revolución y un cilindro de esta misma especie; visto desde el punto debido, da, en efecto, una impresión parecida a la de los cuerpos originales, si bien hay que advertir que ciertas circunstancias psicológicas influyen mucho en esto, pues, naturalmente, el hecho de que el objeto e imagen determinen los mismos rayos luminosos sobre el ojo, no es suficiente para dar la misma

impresión real; para que así ocurra, es muy conveniente tener hábito de estas observaciones. Así, como se tiene más costumbre de ver una esfera sobre un cubo, que un elipsoide sobre un paralelepípedo oblicuo (esta es la forma de la perspectiva relieve), de antemano nos sentimos inclinados a referir la impresión luminosa recibida al primer objeto. El examen de estas circunstancias corresponde a los psicólogos, y, por tanto, no hemos de entrar en él.

Lo dicho hasta aquí es suficiente para dar una primera idea de la aplicación de las transformaciones proyectivas en la Geometría descriptiva; pero, naturalmente, conviene profundizar más en estos estudios, pues en mi opinión, el de la Geometría descriptiva es indispensable para todo profesor de Matemáticas.

2.º Otra aplicación de las transformaciones proyectivas, consiste en que *por medio de ellas, se pueden obtener nuevas propiedades geométricas*. Ya anteriormente, hemos visto ejemplo de ello con las transformaciones afines.

a) *Partimos del hecho de que una circunferencia se transforma por medio de la proyección central, o de la perspectiva relieve, en una sección cónica*, es decir, en la sección del cono que se obtiene proyectando los puntos de una circunferencia desde uno exterior a su plano, sección que puede ser elipse, hipérbola o parábola, según la posición del plano secante (figura 68).

b) *Para la Geometría proyectiva no existe, pues, más que una especie de secciones cónicas*, porque cada una de ellas puede transformarse proyectivamente en una cualquiera de las otras o en una circunferencia. Así vistas las cosas, entre elipse, hipérbola y parábola, no existe ninguna diferencia absoluta esencial, sino únicamente la circunstancia ocasionada por la posición que ocupen respecto de una recta que, por costumbre, se llama «del infinito».

c) *Vamos ahora a deducir el teorema fundamental de la razón doble en las cónicas: Los haces obtenidos proyectando cuatro puntos fijos de una cónica, desde otro P móvil sobre ella tienen todos la misma razón doble, independiente de la posición de P.*

Para demostrarlo, consideremos la circunferencia de la cual se deriva por proyección la cónica de que se trata; como, en esta proyección no varían las razones dobles, el teorema quedará

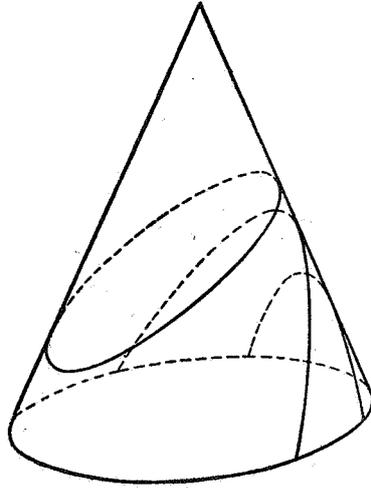


Figura 68

demostrado de una manera general si se prueba que los haces que proyectan cuatro puntos cualesquiera, fijos de una circunferencia  $1', 2', 3', 4'$  (fig. 69), desde otros dos arbitrarios de la

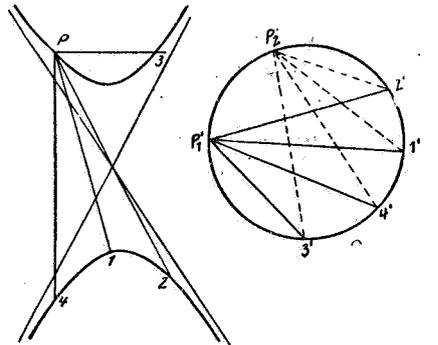


Figura 69

misma,  $P'_1$  y  $P'_2$ , tienen la misma razón doble, y esto es evidente; pues, por las propiedades de los ángulos inscritos, los ángulos del haz  $P'_1$  ( $1', 2', 3', 4'$ ), son respectivamente, iguales

a los del  $P'_2$  (1', 2', 3', 4'), y, por consiguiente, también lo son los senos de estos ángulos, que forman las razones dobles de los dos haces.

d) Fundándose en este teorema, ha definido Steiner las cónicas, en general, como *lugar geométrico de los puntos comunes de cada par de rayos homólogos de dos haces proyectivos, es decir, tales que las cuaternas de rayos homólogos tengan la misma razón doble.*

Estas pocas indicaciones son suficientes para demostrar la gran importancia de las transformaciones proyectivas en la teoría de las cónicas; pueden ser ampliadas con la lectura de cualquier tratado de Geometría proyectiva.

### III. Transformaciones puntuables de orden superior

Se llaman así, *las transformaciones representadas por funciones racionales de grado superior al primero, ya sean algebraicas o transcendentales*, de la forma:

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z)$$

De acuerdo con el carácter de estas lecciones, no haremos un estudio sistemático de tales transformaciones, sino que nos limitaremos a examinar algunos ejemplos de importancia general en la Matemática pura o en sus aplicaciones. Comenzaremos por hablar de las más frecuentemente usada en estas transformaciones, la *transformación por radios vectores recíprocos.*

1.º *La transformación por radios vectores recíprocos.*— Como es sabido, en esta transformación, a cada punto P, le corresponde otro P' situado en su recta de unión con el origen de coordenadas, O, y tal que el producto OP, OP' sea constante (figura 70). Esta transformación, además de su conocida gran importancia en la Matemática pura, y especialmente en la *teoría de funciones de variable compleja*, se usa con mucha frecuencia en la Física, y tiene otras aplicaciones de una de las cuales trataremos después particularmente.

1.º Puesto que  $P$  y  $P'$  están en una misma recta que pasa por el origen de coordenadas, debe verificarse que :

$$x' : y' : z' = x : y : z \quad (1)$$

Tomando la constante de la transformación como unidad, la relación entre las distancias  $OP$  y  $OP'$  tiene por expresión :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1 \quad (2)$$

y, por tanto, las ecuaciones de la transformación, son

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

así como sus recíprocas :

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad z = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (4)$$

las cuales nos dicen que se trata de un caso particular de las llamadas transformaciones birracionales cuadráticas.

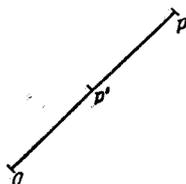


Figura 70

Existe una clase muy extensa de tales transformaciones birracionales (en general biunívocas) que en los dos sentidos se representan por funciones racionales, y bajo el nombre de transformaciones cremonianas son objeto de una teoría general, de la que sólo exponaremos sus más sencillos representantes.

2.º Las ecuaciones (3) y (4) muestran también que la transformación es biunívoca, con la sola excepción del origen de coordenadas; pues cuando  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tienden simultáneamente a cero, el denominador de (3) de orden superior al numerador, se anula, y, por consiguiente,  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , se hacen infinitas; pode-

mos, pues, decir, que el origen es *punto límite* de la transformación. Recíprocamente, para todos los puntos del infinito, se obtiene como homólogo el origen de coordenadas; utilizando la terminología ya antes introducida, diremos que a este punto le corresponde un punto único del plano del infinito.

La denominación de *plano del infinito*, estaba justificada al tratarse de las transformaciones proyectivas, porque en ellas, los puntos homólogos de todos los del infinito, están en un plano, y utilizando esta locución, se podían enunciar los teoremas con toda generalidad y sin la distinción de casos particulares, ni excepciones. Nada hay ahora que nos impida adoptar una forma distinta de expresión, para también poder enunciar en este caso los teoremas sin excepciones: el campo del infinito se transforma aquí en un punto, luego, diremos, simplemente, que *existe un solo punto del infinito que en esta transformación tiene por homólogo el origen de coordenadas. Con esto, la transformación es biunívoca, sin excepción.*

Nunca se insistirá bastante en decir que con estas expresiones no se roza para nada la cuestión metafísica de la verdadera naturaleza de los elementos del infinito, de la que ahora, como antes, prescindimos totalmente. Siempre hay, sin embargo, gentes que, acostumbradas a utilizar sólo uno de estos modos de expresión, quisieran atribuirle un sentido transcendental, con lo cual se llega a veces a verdaderas porfías entre unos y otros. En realidad, a todos ellos les falta razón: olvidan que sólo se trata de convenios arbitrarios, cómodos para uno u otro objeto.

3.º La propiedad más importante de la transformación por radios vectores recíprocos es, dicho en términos generales, que *convierte esferas en esferas.* En efecto, la ecuación de una esfera tiene la forma:

$$A(x'^2 + y'^2 + z'^2) + Bx' + Cy' + Dz' + E = 0 \quad (1)$$

de la cual, sustituyendo  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  por valores (3), el término cuadrático por el deducido de (2), y multiplicado por

$$x'^2 + y'^2 + z'^2$$

resulta :

$$A + Bx + Cy + Dz + E(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

que representa otra esfera.

Haciendo  $A=0$  en la ecuación (5), se obtienen planos que, en cierto modo, pueden considerarse como esferas singulares que contienen el *punto del infinito*; a las cuales corresponden, por consiguiente, como homólogas, otras que pasan por el origen de coordenadas. Recíprocamente, toda esfera que contenga al origen, tiene como homóloga otra que pasa por el punto del infinito (plano). Con estos convenios, el teorema es completamente general y puede decirse que *a una esfera le corresponde siempre otra esfera*.

Una *circunferencia* puede definirse como intersección de dos esferas (o una esfera y un plano), y tiene, por lo tanto, como

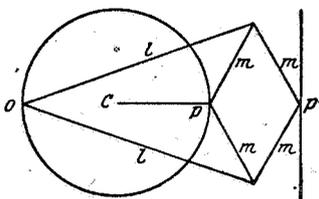


Figura 71

homóloga, otra *circunferencia*. Entre las circunferencias se comprende las *líneas rectas* como *circunferencias que pasan por el punto del infinito*, y les corresponden circunferencias que pasan por el origen de coordenadas.

4.º Este último teorema subsiste evidentemente, cuando la transformación se limita al interior de un plano y da una elegante solución al problema de realizar mecánicamente movimientos rectilíneos, que es sumamente elemental e interesa también a los no matemáticos. Se trata de hacer que el punto común a dos barras rígidas articuladas describa una recta, problema que tuvo la mayor importancia en la construcción de máquinas de vapor y permitió la transformación del movimiento rectilíneo de vaivén del émbolo en el circular del extremo de la biela.

Aquí nos interesa el *inversor* construido en 1864 por el oficial francés *Peaucellier*, que consiste (fig. 71) en *seis varillas*

articuladas; dos de ellas, de longitud  $l$ , unidas por sus extremos a un punto fijo  $O$ ; y las otras cuatro de longitud  $m$ , formando un rombo con dos vértices opuestos en los extremos de las varillas  $l$ , y los otros dos  $p$  y  $p'$  libres. El aparato tiene dos grados de libertad, puesto que puede moverse, o bien, variando el ángulo que las dos varillas  $l$  forman entre sí, o haciéndolas girar alrededor de  $O$ . Efectuando tanto uno como el otro movimiento, los puntos  $O$ ,  $P$  y  $P'$  permanecen constantemente en línea recta, y cualquiera que sea la posición de  $P$ , se verifica que:

$$OP \cdot OP' = l^2 - m^2 = \text{constante}$$

lo cual nos dice que *el aparato efectúa una transformación por radios vectores recíprocos que tiene por centro el punto  $O$* . El punto  $P'$  recorrerá, pues, una recta cuando el  $P$  recorra una circunferencia, lo que se consigue añadiendo al aparato otra varilla  $PC$  susceptible de girar alrededor de  $C$ , punto medio del segmento, cuyos extremos son  $O$  y la posición primitiva de  $P$ . De este modo queda sólo un grado de libertad y  $P'$  recorre, efectivamente, una recta, pero no toda entera, sino sólo un segmento de ella, limitado por la condición de que sus puntos estén a una distancia de  $O$  menor que  $l+m$ , máxima que permite la longitud de las varillas.

En algunos modelos, el punto  $p$  puede desplazarse un poco, de modo que la circunferencia descrita por  $P$  no pasa por  $O$ , sino muy cerca de él, con lo cual,  $P'$  no recorre ya una recta, sino una *circunferencia de radio muy grande*. El aparato así modificado es también susceptible de aplicaciones útiles.

6.º Entre las propiedades más importantes de la transformación por radios vectores recíprocos, está la de ser *conforme*, es decir, *conservar la amplitud del ángulo formado por dos superficies en cualquiera de los puntos de su línea de intersección*, propiedad que no demostramos por no descender a detalles en esta rápida ojeada.

La *proyección estereográfica* es un caso particular de la transformación por radios recíprocos, que tiene una gran importancia en la práctica. Se obtiene considerando una esfera que

tenga por homólogo el plano  $z'=1$ , esfera cuya ecuación, según la tercera de las (3), es

$$1 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

que puede también escribirse en la forma :

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

que indica que la esfera buscada es la de radio  $\frac{1}{2}$ , que tiene como centro el punto  $z = \frac{1}{2}$  del eje  $z$ , la cual pasa por el origen y es tangente al plano  $z'=1$  del dibujo (fig. 72). Los pun-

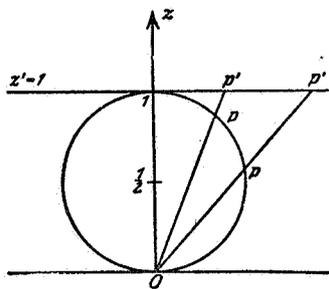


Figura 72

tos de la esfera se representan en el plano, proyectándolos sobre él desde el origen  $O$ .

Las propiedades de esta transformación no necesitan casi demostrarse, sino que se pueden ver intuitivamente en la figura. Las más importantes son las siguientes :

a) La transformación es biunívoca sin excepción, con tal de considerar todos los puntos del infinito del plano como uno solo, al que corresponde el origen.

b) Las circunferencias trazadas en la esfera, tienen por homólogas circunferencias del plano. Si pasan por el origen sus homólogas pasan por el punto del infinito del plano ; es decir, son rectas.

c) La representación es *conforme*.

La importancia de la proyección estereográfica en la teoría de funciones, se ha visto ya en el primer tomo de esta obra. Se aplica también mucho en la Geografía y en la Astronomía, habiendo sido ya conocida por los antiguos astrónomos, y empleándose hoy en las cartas hemisféricas y de las tierras polares.

## 2. Proyecciones cartográficas más generales.

La teoría de las cartas geográficas debe tener un lugar en la segunda enseñanza, no sólo porque los alumnos deben saber cómo están dibujados los mapas de sus atlas, sino también porque el profesor de Matemáticas obtendrá mucho más provecho en su enseñanza, no limitándose exclusivamente a tratar asuntos abstractos.

Para mayor comodidad, supongamos la esfera terrestre proyectada estereográficamente sobre el plano  $xy$ . Si queremos representarla sobre otro plano  $\xi\eta$ , la transformación estará definida por dos ecuaciones:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y)$$

Las representaciones más usadas en la práctica, son las llamadas *conformes*, que se obtienen considerando la variable compleja  $\xi + i\eta$  como función analítica de la  $x + iy$ :

$$\xi + i\eta = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y)$$

Es de advertir, sin embargo, que en la práctica de la Geografía, son también *muy utilizadas representaciones no conformes*, así que no debe suponerse, como a veces ocurre, que sólo las conformes son importantes.

Entre las representaciones *conformes* más importantes figura la proyección ideada en 1550 por el famoso matemático *Gerhard Merkator* (cuyo verdadero nombre era el bien alemán *Kremer*), con arreglo a la cual, están dibujados muchos mapas terrestres de casi todos los atlas. Esta proyección se define toman-

do como función analítica  $f$  la logarítmica, es decir, por la ecuación :

$$\xi + i \eta = \log (x + i y)$$

De esta fórmula, los versados en Matemáticas pueden deducir fácilmente las propiedades de la representación, cosa que se hace difícil a los geógrafos que carecen de formación matemática. Tomando en el plano  $xy$  coordenadas polares (fig. 73), y poniendo  $x + i y = r \cdot e^{i \varphi}$  se obtiene :

$$\xi + i \eta = \log (r \cdot e^{i \varphi}) = \log r + i \varphi$$

de donde :

$$\xi = \log r, \quad \eta = \varphi$$

Si se toma como centro de la proyección estereográfica el polo sur de la tierra, al norte le corresponde el origen de coordenadas del plano  $xy$ , y los meridianos tienen por homólogos

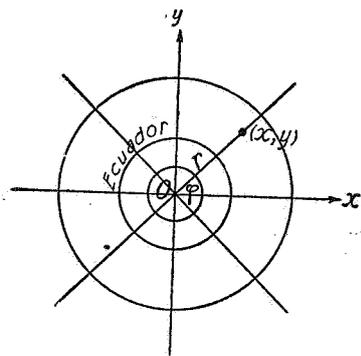


Figura 73

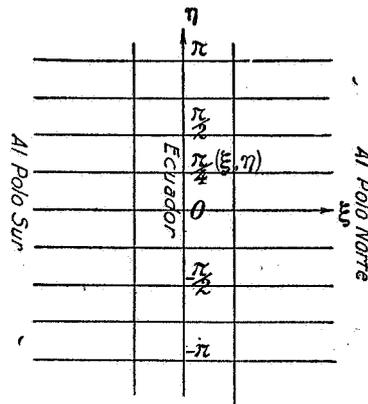


Figura 74

las rectas  $\varphi = \text{constante}$ , que en la proyección de Merkator están representadas (fig. 74), por las rectas  $\eta = \text{constante}$ , paralelas al eje  $\xi$ . El polo norte y el sur, son los puntos del infini-

ro de estas rectas tomado en uno u otro sentido; el polo norte ( $\xi = -\infty$ ) a la izquierda y el sur ( $\xi = +\infty$ ) a la derecha. Como el ángulo  $\varphi$  está determinado, salvo cualquier múltiplo par  $2k\pi$  de  $\pi$  la representación no es biunívoca y la superficie terrestre está representada por cada una de las fajas de anchura igual a  $2\pi$ , paralelas al eje  $\xi$ .

A los paralelos corresponden en la proyección estereográfica las circunferencias  $r = \text{constante}$  y en la de Merkator las rectas paralelas  $\xi = \text{constante}$ , como era de esperar; pues, por ser la representación conforme, tienen que ser trayectorias ortogonales de las rectas paralelas, homólogas de los meridianos. En particular, el ecuador ( $r=1$ ), tiene como homólogo el eje  $\eta$  ( $\xi=0$ ).

El ejemplo de la proyección de Merkator es suficiente para iniciarse en el estudio de las numerosas transformaciones usadas en la teoría de las cartas geográficas. Conviene, sin embargo, indicar algunos teoremas generales, entre los cuales los más importantes son los llamados *teoremas de Tissot*.

Sean dos mapas de la esfera terrestre dibujados sobre los planos  $xy$  y  $\xi\eta$ , respectivamente, cuyos mapas pueden ser elegidos arbitrariamente e incluso no conformes. Entre ellos existirá, no obstante, una relación de la forma:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y)$$

Fijémonos únicamente en los entornos de dos puntos homólogos  $(x_0, y_0)$  y  $(\xi_0, \eta_0)$ , tales, por consiguiente, que se verifica:

$$\xi_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0)$$

Para ello, introduzcamos las nuevas variables  $x', y', \xi', \eta'$ , definidas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', & y &= y_0 + y' \\ \xi &= \xi_0 + \xi', & \eta &= \eta_0 + \eta' \end{aligned}$$

con lo cual, las funciones  $\varphi$ ,  $\chi$  se pueden desarrollar por la fórmula de Taylor en las sumas

$$\xi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots$$

$$\eta' = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots$$

donde las derivadas están tomadas en el punto  $x=x_0$ ,  $y=y_0$ , y los puntos suspensivos representan los términos de orden superior en  $x'$ ,  $y'$ . Limitándonos a considerar un *entorno del punto*  $(x_0, y_0)$  *suficientemente pequeño* para que estos términos lineales den los valores de  $\xi'$ ,  $\eta'$ , con la aproximación requerida, para lo cual, naturalmente, es preciso excluir de la consideración el punto  $(x_0, y_0)$ , para el cual las cuatro derivadas parciales se anulan, para cada uno de ellos se obtienen dos ecuaciones lineales entre  $x'$ ,  $y'$ ,  $\xi'$ ,  $\eta'$ , que nos dicen que *dos representaciones geográficas del mismo terreno, están relacionadas en las proximidades de un lugar arbitrario (y no singular), por medio de una transformación afín*. Esta propiedad es el fundamento de los teoremas de Tissot, que se deducen fácilmente de ella aplicando los teoremas sobre la afinidad que aquí hemos enunciado. Así, por ejemplo, el determinante de la transformación afín es en este caso

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}$$

que, como es sabido, es el *determinante funcional* de  $\varphi$ ,  $\chi$  en el punto  $(x_0, y_0)$ . Admitiremos que  $\Delta$  es distinto de cero, porque en el caso contrario el área de un entorno de  $(x, y)$ , viene representada por un arco en el plano  $\xi\eta$ , lo cual no tiene interés en Geografía. Siendo, pues,  $\Delta \neq 0$ , basta recordar una propiedad de la transformación afín (pág. 78), para afirmar que *el entorno del punto*  $(\xi_0, \eta_0)$  *se obtiene del*  $(x_0, y_0)$  *con aproximación suficiente sometiendo a este último a dos dilataciones, en direcciones perpendiculares entre sí, y haciéndole girar después un ángulo conveniente*.

Este teorema, obtenido por Tisserand de un modo intuitivo constituye un interesante ejemplo, de cómo los que se dedican a las ciencias de aplicación cuidan de satisfacer las exigencias matemáticas de sus respectivas disciplinas.

3. *La transformación puntual biunívoca y continua más general.*

Todas las funciones hasta aquí empleadas para definir una transformación eran continuas y derivables cuantas veces se quiera, en una palabra, analíticas y (susceptibles de desarrollarse en serie de Taylor), pero también hemos visto que se utilizan funciones no sólo multiformes, sino infinitiformes (por ejemplo, el logaritmo). Ahora vamos a fijarnos en la condición esencial de que *las funciones representativas sean unívocas, sin excepción, en ambos sentidos, y sin otra condición que la de ser continuas*, sin hacer hipótesis alguna acerca de su derivabilidad, etc., y estudiaremos las propiedades de las figuras geométricas, invariantes en las transformaciones continuas así definidas. Esto equivaldría, por ejemplo, a investigar cuáles características permanecen invariables en figuras dibujadas sobre un trozo de caucho, cuando éste se deforma de un modo arbitrario sin romperlo.

El conjunto de propiedades así obtenido recibe el nombre de *Análisis situs* y podría decirse que constituye la teoría de las *relaciones más puras de posición, completamente independientes de toda relación de magnitud* (\*).

El nombre procede de *Riemann* que, en 1857, realizó por primera vez investigaciones de esta naturaleza en el famoso trabajo que lleva el título de *Theorie der Abel'schen Funktionen* (\*\*).

---

(\*) Esto hace que, modernamente, se designe a esta rama de la ciencia con el nombre de *Geometría de la posición*, que antes se dió por algunos a la Geometría proyectiva. (N. del T.)

(\*\*) *Journal f. d. reine und angewandte Mathematik*. Bd. 54, *Gesam. Mathematische Werke* (2 Auflage. Leipzig, 1882), pág. 88.

La palabra *análisis*, la usa *Riemann* en el mismo sentido de *Leibniz*, es decir, en el metodológico, y no en el que hoy se le da en Matemáticas.

El *Análisis situs* acostumbra incluirse en la teoría de funciones, mientras que en la Geometría es casi siempre omitido. Una excepción que conviene mencionar es la de Möbius, que en un trabajo publicado en 1861 se ocupa de *Análisis situs* estudiando figuras transformables entre sí por medio de deformaciones continuas.

En este estudio nos ocuparemos únicamente de superficies. En primer lugar, se presenta la *diferenciación entre superficies de una cara y de dos caras*, de la cual ya hemos tenido ocasión de hablar al principio de este libro con motivo de la superficie de Möbius, que recorrida de un modo continuo permitía pasar insensiblemente de uno a otro lado. Esta propiedad se conserva evidentemente en todas las deformaciones continuas, de modo

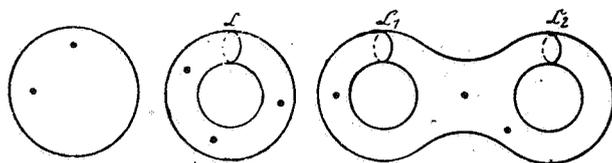


Figura 75

que en *Análisis situs* es preciso, ante todo, hacer la distinción entre superficies de una cara y de dos caras.

Aunque la teoría de las superficies de una cara no presenta dificultades especiales, aquí nos ocuparemos solamente de las de dos caras, que son las únicas que suelen utilizarse en la teoría de funciones. Cada una de estas superficies está caracterizada en *Análisis situs* por dos números naturales que son: *el número  $\mu$  de sus bordes y el  $p$  de los cortes que se le pueden dar sin que se descompongan en parte separadas (género)*; en términos más precisos: *Dos superficies de dos caras pueden ser relacionadas de una manera biunívoca y continua, o como ahora se dice, son homeomorfas cuando aquellos números  $\mu$  y  $p$  sean respectivamente iguales en ambas*. La demostración de ésto nos llevaría muy lejos; por ello, nos limitaremos a algunos ejemplos que aclaren la significación de estos números  $\mu$  y  $p$ .

Sean, por ejemplo, una esfera, un toro (anillo circular), y un doble anillo representados esquemáticamente en la figura 75.

Todas estas superficies son cerradas y carecen, por tanto, de bordes, luego  $\mu=0$  para las tres. La esfera queda descompuesta por cualquier curva cerrada dibujada en ella, en dos partes separadas, luego en la esfera es  $p=0$ . En el anillo en cambio se puede trazar un meridiano sin descomponer la superficie en dos partes, pero una vez trazado el meridiano, si se traza otra sección, la divide en dos partes; así, pues,  $p=1$ . En el doble anillo se pueden trazar las dos curvas meridianas  $L_1$  y  $L_2$  sin romper la conexión de la superficie, luego  $p=2$ .

Es fácil ver que añadiendo anillos se puede llegar a obtener una superficie para la cual  $p$  tenga un valor previa y arbitrariamente fijado. Para que  $\mu$  alcance un valor dado basta hacer pequeños agujeros, con lo cual se obtiene el número que

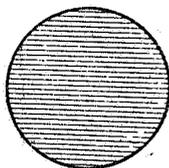


Figura 76

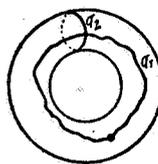


Figura 77

se quiera de bordes. De este modo se pueden obtener superficies con  $p$  y  $\mu$  iguales a números prefijados, las cuales son homeomorfas con todas las que tienen los mismos valores de  $p$  y  $\mu$ , aun cuando la apariencia de unas y otras sea completamente distinta.

Riemann ha ideado, para clasificar estas superficies, el concepto de *conexión*, designando como *grado de la conexión* al número  $2p + \mu$ , y a las superficies de esta condición las llama  $(2p + \mu)$  simplemente conexas, así, dice que una superficie es simplemente conexa cuando  $2p + \mu = 1$ , para lo cual basta que sea  $p=0$  y  $\mu=1$ . Un ejemplo es la esfera con un agujero que ensanchando éste de una manera continua puede transformar en un *disco circular* (fig. 76).

Riemann introdujo también el concepto de *corte* (Querschnitt) aplicada a toda sección trazada desde un punto de un borde a otro, siendo naturalmente preciso para que puedan trazarse, que la superficie tengan bordes, es decir, que  $\mu > 0$ . *Todo*

corte disminuye en una unidad el grado de conexión, de tal modo que una superficie con  $\mu > 0$  queda convertida en simplemente conexa por medio de  $2p + \mu - 1$  cortes. Así, por ejemplo, si en un anillo (fig. 77) con un agujero ( $p = \mu = 1$ ), se traza un corte  $q_1$  entre los bordes de éste, y otro  $q_2$  que empiece y termine en el  $q_1$ , el grado de conexión de la superficie queda reducido de  $2 \cdot 1 + 1 = 3$  a 1.

En lo que se refiere a bibliografía de *Análisis situs*, debe citarse como exposición que comprende no sólo las superficies, sino cualesquiera otras figuras, el artículo de M. Dehn y P. Heegard en la *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (III AB3), que tiene el defecto de ser demasiado abstracto. Es de desear una exposición más fácilmente accesible a los principiantes, a quienes debe comenzarse por mostrar ejemplos sencillos, antes de hacerles entrar en el campo de las ideas generales.

El *Análisis situs* desempeña un importante papel en la Física, especialmente en la teoría del potencial. En la Matemática elemental está representado por el *teorema de Euler*, que como es sabido, dice que *en todo poliedro ordinario que tenga C caras, A aristas y V vértices, se verifica la relación:*

$$C + V = A + 2$$

Si el poliedro se deforma de un modo arbitrario pero continuo, los tres números permanecen constantes, de modo que la ecuación subsiste. Los tres números  $C$ ,  $V$  y  $A$  pueden considerarse como número de caras, vértices y aristas de una *descomposición arbitraria de la esfera* o de una superficie homeomorfa con ella, en la cual cada parte sea simplemente conexa.

El teorema puede generalizarse para superficies de cualquier género diciendo que *si una superficie se divide por medio de A líneas en C porciones simplemente conexas, con V vértices entre todas, se verifica que*

$$C + V = A + 2 - 2p$$

si es  $p$  el máximo número de cortes que se puede dar a la superficie, sin descomponerla.

El lector puede intentar por sí mismo, la demostración de

este teorema, que por otra parte puede encontrarse en el citado trabajo de *M. Dehn* y *P. Meegard*; naturalmente, existen otras muchas generalizaciones de este teorema.

Con esto, terminamos lo relativo a las transformaciones puntuales, en general, y vamos a ver ahora, también de manera rápida, algo acerca de las transformaciones que hacen corresponder a los puntos elementos geométricos de otra especie.

#### IV. Transformaciones con cambio de los elementos espaciales

##### 1. Transformaciones correlativas.

Como primera clase de estas correspondencias con cambio de naturaleza en los elementos homólogos figuran las que hacen corresponder punto a recta en el espacio de dos dimensiones, y punto a plano en el de tres. En este estudio nos limitaremos exclusivamente a las primeras, adoptando el método de exposición empleado por *Plücker* en sus ya citados *Estudios analítico-geométricos*.

La idea fundamental es, como ya en otro lugar indicamos, considerar las constantes  $u$  y  $v$  de la ecuación

$$ux + vy = 1 \quad (1)$$

como *coordenadas de la recta* representada por ella, y operar con estas coordenadas del mismo modo que con las de puntos, estableciendo así una nueva Geometría analítica paralela con la primitiva. Por ejemplo; a la *curva lugar geométrico de los puntos representados por la ecuación*  $f(x, y) = 0$ , le corresponde la *curva envolvente de las rectas representadas por la ecuación*  $g(u, v) = 0$ . Para estudiar la transformación correlativa, tomemos dos planos  $P$  y  $P'$ , y en este último, coordenadas  $x', y'$  de puntos, ligados a las  $u, v$ , de rectas del plano  $P$ , por las ecuaciones

$$u = \varphi(x', y'), \quad v = \chi(x', y') \quad (2)$$

De este modo, a cada punto  $(x', y')$  de  $P'$  le corresponde en

$P$  una recta, cuya ecuación se obtiene sustituyendo estos valores en la (1).

1.º *El ejemplo más sencillo* de una transformación de esta índole, está dado por las ecuaciones :

$$w=x', \quad v=y' \quad (3)$$

por medio de las cuales, el punto  $(x', y')$  del plano  $P'$  se transforma en la recta

$$x'x + y'y = 1 \quad (3')$$

del plano  $P$ .

Si imaginamos los planos  $P$  y  $P'$  superpuestos de modo que coincidan los ejes de coordenadas de ambos, la recta (3') es la polar del punto  $(x', y')$  respecto de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ , trazada con un radio igual a la unidad y el origen como centro.

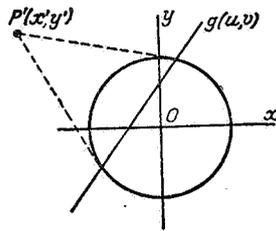


Figura 78

*La transformación de que nos ocupamos, no es, pues, otra cosa que la conocida polaridad respecto de la circunferencia (figura 78).*

Para definir la transformación, no son precisas las dos ecuaciones (3), sino que basta con la (3') que determina la recta homóloga de cada punto  $(x', y')$ . Como esta ecuación es simétrica, *los dos planos  $P$  y  $P'$  desempeñan el mismo papel en la transformación*; es decir, que a cada punto de  $P$  debe corresponder también una recta en  $P'$  y como los dos planos están superpuestos, a un punto cualquiera le debe corresponder la misma recta, ya se considere como perteneciente a uno o a otro plano.

La transformación se llama *correlativa* en atención a la primera de estas dos propiedades, y *recíproca* a causa de la segunda. Esta reciprocidad permite suprimir la distinción entre los dos planos y hablar de polo y polar situados en un plano único.

En cuanto a otras propiedades de esta transformación, limitémonos a observar que a una curva del plano  $P'$ , descrita por el punto  $(x', y')$ , corresponde la línea del plano  $P$ , envuelta por las rectas  $(u, v)$ .

2.º Del mismo modo que en la colineación, se puede obtener la *transformación correlativa general*, igualando  $u$  y  $v$  a funciones lineales de  $x', y'$  con el mismo denominador:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \\ v &= \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Sustituyendo estos valores en (1) y multiplicando por el denominador común, se obtiene, gracias a la arbitrariedad de los nueve coeficientes  $a_1, \dots, b_3$  la *ecuación más general, lineal, tanto respecto de  $x$ , y como de  $x', y'$*

$$a_1 x x' + b_1 x y' + c_1 x + a_2 y x' + b_2 y y' + c_2 y - a_3 x' - b_3 y' - c_3 = 0 \quad (4')$$

*Recíprocamente: una ecuación «bilineal» de esta forma representa una transformación correlativa entre los planos  $P$  y  $P'$ , puesto que fijado un punto, o sea un par de coordenadas en uno de los planos, la ecuación es lineal respecto de las otras dos, luego representa en el segundo plano una recta, homóloga del punto dado.*

3.º Esta correspondencia será también *recíproca*, en el sentido antes indicado, únicamente en el caso de que cada dos términos simétricos de la ecuación (4') tengan el mismo coeficiente; es decir, cuando pueda escribirse en la forma:

$$A x x' + B (x y' + y x') + C y y' + D (x + x') + E (y + y') + F = 0 \quad (5)$$

La transformación que esta ecuación define, no es otra cosa que la polaridad respecto de la cónica:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Toda polaridad respecto de una cónica, es una correspondencia correlativa y recíproca.

Generalizando estas correspondencias, se llega a otras muy importantes, las llamadas transformaciones de contacto.

## 2. Transformaciones de contacto.

Estas transformaciones, así llamadas por *Sophus Lie*, se obtienen utilizando en lugar de la ecuación bilineal (4'), una de

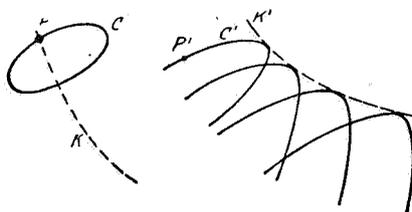


Figura 79

grado superior arbitrario, que, naturalmente, satisfaga a las condiciones precisas de continuidad

$$\Omega(x, y, x', y') = 0 \tag{1}$$

Esta ecuación fué llamada *directriz* por Plücker, a quien se debe el estudio que a continuación exponemos.

Fijado un par de valores para  $x$  e  $y$ , queda determinado un punto  $P$  del plano  $\pi$  (fig. 79), al cual corresponde en el  $\pi'$  la curva  $C'$  representada por la ecuación  $\Omega=0$  después de sustituidos en ella los valores fijos de  $x$  e  $y$ , que hemos tomado.

Si el punto que se toma es el  $P'(x', y')$  del plano  $\pi'$ , fijos los valores de  $x'$  e  $y'$ , la ecuación  $\Omega=0$  tiene por variables las  $x$  e  $y$ , y representa una curva  $C$  del plano  $\pi$  que necesariamente ha de pasar por el primer punto  $P$ . Con esto queda estableci-

da una correspondencia entre los puntos  $P$  del plano  $\pi$  y las  $\infty^2$  curvas  $C'$  del plano  $\pi'$  por una parte, y entre los puntos  $P'$  y las infinitas curvas  $C$  por otra. Si el punto  $P$  se mueve sobre el plano  $\pi$ , a cada una de sus posiciones le corresponde una curva  $C'$  y el conjunto de todas ellas envuelve una nueva curva  $K'$ , que puede considerarse como homóloga de la  $K$  descrita por el punto  $P$ .

De este modo queda definida, mediante la ecuación  $\Omega=0$ , una transformación del plano  $\pi$  en el  $\pi'$ , tal que a cada curva del primero, corresponde otra en el segundo.

Para seguir *analíticamente* estas consideraciones, imaginemos sustituida la curva  $K$  por un polígono rectilíneo de lados muy pequeños, como para facilitar la intuición se acostumbra

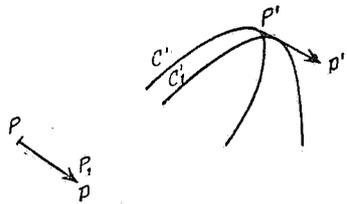


Figura 80

hacer en el Cálculo diferencial y veamos qué figura corresponde a uno de tales polígonos, efectuando al mismo tiempo siempre el obligado paso al límite, lo cual quiere decir que al hablar de un lado del polígono nos referimos al llamado *elemento lineal*, conjunto de un punto  $P$  y la *dirección* de su movimiento (dirección de la tangente a  $K$  en  $P$ ). Tomemos ahora en esta dirección de  $P$  un punto  $P_1$  (fig. 80) de coordenadas  $x+dx$ ,  $y+dy$ , siendo  $dx$ ,  $dy$  infinitésimos arbitrarios, pero tales que  $\frac{dy}{dx}$  conserve el valor  $p$  que caracteriza la dirección dada. Al punto  $P$  corresponde en  $\pi'$  la curva  $C'$ , cuya ecuación es

$$\Omega(x, y; x', y')=0$$

en la que  $x'$ ,  $y'$  son las coordenadas variables; al punto  $P_1$  corresponde la línea  $C'_1$  de ecuación

$$\Omega(x+dx, y+dy; x', y')=0$$

que desarrollando respecto de  $dx$  y  $dy$ , y considerando solamente los términos lineales, da :

$$\Omega(x, y; x', y') + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0$$

De estas dos ecuaciones se deducen las coordenadas  $x'$  e  $y'$  del punto  $A'$  de intersección de  $C'$  y  $C'_1$  que en el límite es el de contacto de  $C'$  con la envolvente  $K'$ . Como hemos puesto  $p = \frac{dy}{dx}$  las dos ecuaciones pueden sustituirse por

$$\left. \begin{aligned} \Omega(x, y; x', y') &= 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$C'$  y  $C'_1$  tienen común en el punto  $P'$ , en el límite, la tangente cuya dirección está dada por el valor  $p' = \frac{dy'}{dx'}$ .

Esta tangente que es también la de la envolvente  $K'$  en el punto  $P'$ , está determinada por la ecuación, deducida de la  $\Omega=0$ :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} \cdot dx' + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} dy' = 0,$$

que puede escribirse en la forma :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} p' = 0. \quad (3)$$

Dado, pues, un punto  $P$  en la curva  $K$ , y la dirección  $p$  de la tangente en dicho punto, por medio de las ecuaciones (2) y (3) se obtiene el punto  $P'$  homólogo en  $K'$  y la dirección  $p'$  de la tangente a  $K'$  en  $P'$ . Por consiguiente, la *transformación hace corresponder a todo elemento de línea*  $(x, y, p)$  del plano  $\pi$ , otro  $(x', y', p')$  en el plano  $\pi'$ .

Repitiendo estas consideraciones, para todos los lados del polígono aproximado a la curva  $K$ , y, por tanto, a los elemen-

tos lineales de ésta, se obtiene como homólogo en  $P'$  otro polígono aproximado a la curva  $K'$  y los elementos lineales de ésta. Así, pues, cuando  $x$ ,  $y$ ,  $p$  toman los valores de las coordenadas y de la dirección de la tangente en todos los puntos de  $K$ , las ecuaciones (2) en  $x'$  e  $y'$  representan la curva  $K'$  homóloga de la  $K$  (fig. 81).

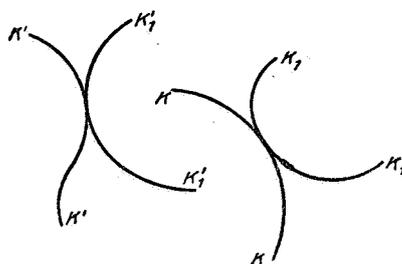


Figura 81

Si dos curvas de  $\pi$  son tangentes, tienen un elemento lineal común, luego sus homólogas habrán de tenerlo también y ser, por lo tanto, tangentes. *El contacto de dos curvas es, pues, una propiedad invariante en la transformación*, razón por la cual, *Sophus Lie* (\*), iniciador de esta teoría, ha llamado transformaciones de contacto a las de esta índole.

Una vez dicho esto acerca de las transformaciones en las cuales los elementos homólogos son de naturalezas distintas, veamos algunos ejemplos de cómo pueden ser aplicadas.

### 3. Algunos ejemplos.

Comencemos por tratar de las *transformaciones correlativas* y del papel que representan en la *teoría de la forma de las curvas algebraicas* y vamos a ver cómo varían formas típicas de curvas en transformaciones correlativas, por ejemplo, en la polaridad respecto de una cónica, limitándonos, naturalmente, a considerar unos muy pocos casos característicos.

(\*) *Sophus Lie u. Scheffers*. «Geometrie der Berührungstransformationen». Bd. 1. Leipzig, 1896. Del segundo tomo sólo se han publicado los tres primeros capítulos, *Math. Ann.* tomo 59, 1904.

Sea la *curva de tercer orden* del tipo de la representada en la figura 82, que tiene una asíntota y puede ser cortada por una recta en uno o tres puntos reales. Esta curva puede convertirse en otra con tres asíntotas, por medio de una transformación proyectiva que haga corresponder a una de las rectas que la

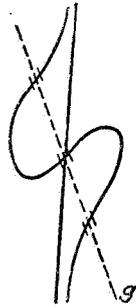


Figura 82

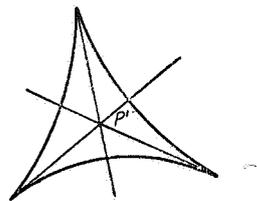


Figura 83

cortan en tres puntos, la del infinito del plano. En uno y otro caso, la curva tiene tres puntos de inflexión reales y alineados. Por medio de una transformación correlativa, se obtiene una *curva de tercera clase*, a la cual se pueden trazar por cada punto exterior una o tres tangentes reales. Los tres puntos de inflexión de la curva primitiva tienen por homólogos en la transformada, tres de retroceso, y a la propiedad de estar aquéllos

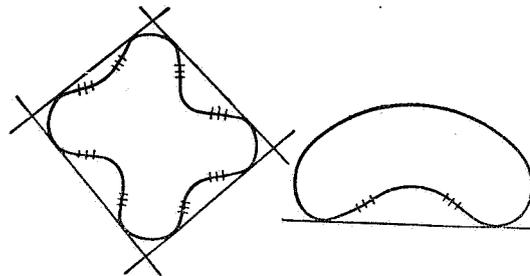


Figura 84

en línea recta, corresponde la de que *las tangentes en los tres puntos de retroceso pasan por un punto* (fig. 83). Cosas análogas pueden decirse de las *curvas de cuarto orden y cuarta clase*. Una curva de cuarto orden puede afectar la forma de un *óvalo con una concavidad* y aun con dos, tres o cuatro (fig. 84).

En el primer caso, la curva tiene *dos puntos de inflexión y una tangente doble* y en los demás casos el número de estos elementos aumenta hasta llegar a *ocho puntos de inflexión y cuatro tangentes dobles*. Al efectuar la correlación, como a una tangente doble corresponde un *punto doble*, se obtienen tipos de *curvas de cuarta clase*, con un número variable de *dos a ocho puntos de retroceso y de una a cuatro tangentes dobles* (fig. 85). El examen de las formas que pueden tener las curvas algebraicas tiene un gran atractivo y en él deben ejercitarse los alumnos; nosotros hemos de conformarnos en esta exposición con lo dicho, que es suficiente para ver cómo las transformaciones correlativas, partiendo de una misma ley, conducen a figuras que, a primera vista, no pueden sea más diferentes.

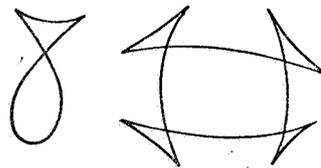


Figura 85

Hablemos ahora de las *aplicaciones de la teoría de las transformaciones de contacto*, que nos muestra un interesante ejemplo de que su idea, como la mayor parte de las ideas teóricas realmente felices, encuentra en la práctica un vasto campo de aplicación, de tal manera que antes de la elaboración teórica ya habían sido prácticamente manejadas. Al decir esto, pensamos ahora, concretamente, en la ya antigua *teoría de las ruedas dentadas*, la cual constituye un *capítulo especial en la Cinemática*, de la teoría de los mecanismos, de gran importancia en la técnica. En la Cinemática se estudian también los mecanismos, de que otras veces hemos hablado, para movimientos rectilíneos.

Claro es que de ésta como de otras disciplinas científicas, sólo podemos mostrar en este curso algunos ejemplos sencillos que den idea de su fin y de su importancia y provoquen el deseo de acudir a los tratados especiales; para orientación general respecto a la Cinemática es recomendable el artículo de *A. Schoen-*

flies (IV, 3) en la Enciclopedia, en el que figura una abundante bibliografía.

El problema de la construcción de las ruedas dentadas es el de *transmitir el movimiento uniforme de una rueda a otra* y como al hacerlo también se transportan fuerzas, no basta hacer rodar la una sobre la otra (fig. 86), sino que hay que dotarlas de dientes de tal modo que engranen, es decir, los salientes de la una encajen en los entrantes de la otra. El problema, es pues, el de *encontrar la forma de los perfiles de estos dientes, tal que una rotación uniforme de una rueda produzca una rotación también uniforme de la otra*, problema también interesante desde el punto de vista geométrico. La parte más importante de la solución es la

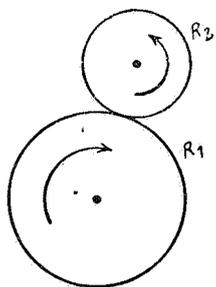


Figura 86

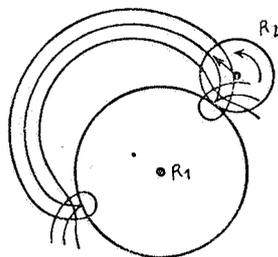


Figura 87

siguiente: *Los dientes de una rueda pueden ser escogidos de manera arbitraria, con las naturales restricciones, impuestas por la realización práctica, de que no tengan contacto unos con otros, y los dientes de la segunda rueda están completamente determinados por los de la primera de los cuales se deducen mediante una transformación de contacto, que se fija de una vez para siempre.*

Nos limitaremos a explicar la significación de este teorema sin demostrarlo. La primera rueda  $R_1$ , se puede suponer fija, en cuyo caso la otra  $R_2$ , se mueve alrededor de ella, describiendo cada uno de sus puntos una epicicloide (fig. 87), que será natural si el punto considerado está en la circunferencia  $R_2$  y acortada o alargada si se supone, respectivamente, dentro o fuera de dicha circunferencia. De este modo, a cada punto del plano móvil  $R_2$ , corresponde en el fijo  $R_1$  una determinada curva, y la ecuación

de esta correspondencia define una *transformación de contacto*, característica de las ruedas dentadas.

Finalmente, veamos la aplicación que este principio teórico puede tener en la práctica. Supongamos, por ejemplo, que los dientes de  $R_2$  sean puntos, o mejor dicho, pequeños círculos, ya que los puntos serían incapaces de transmitir fuerza alguna. Cada uno de estos círculos, tiene por homóloga en la transformación de contacto, una curva que difiere muy poco

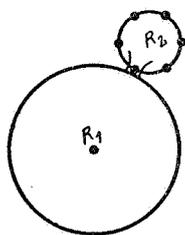


Figura 88

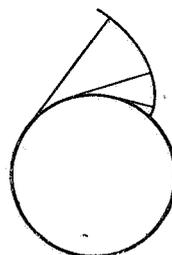


Figura 89

de una epicycloide, puesto que es paralela a ella a una distancia igual al radio del círculo. Los dientes circulares deben rodar sobre dicha curva, luego ésta constituye el perfil que hay que dar a los dientes de  $R_1$  para que se adapten exactamente a los que hemos supuesto en  $R_2$ .

Otros engranajes muy frecuentes son los de dientes cuyos perfiles son arcos de *evolventes de círculo* o de *cicloides* (fig. 89). (En la colección de Schilling, hay modelos de todos ellos.)

## V. Teoría geométrica de los elementos imaginarios

La teoría de las imaginarias procede, como es sabido, del Análisis, dentro del cual ha adquirido gran desarrollo, principalmente, en la teoría de funciones de variable compleja. En la Geometría analítica, se comenzó por admitir *valores complejos*  $x=x_1+ix_2$ ,  $y=y_1+iy_2$  para las variables  $x$  e  $y$ , obteniendo

así *puntos complejos*, aunque sin darles por el momento ninguna interpretación geométrica propiamente dicha.

La utilidad de esta generalización, consiste en evitar los casos singulares que se producen limitándose a la consideración de variables reales, y la consiguiente posibilidad de enunciar teoremas generales sin excepción alguna. Se obtienen, pues, las mismas ventajas que con la introducción en Geometría de los puntos y rectas del infinito. En uno y otro caso se hace lo que se llama «*adjunción de puntos impropios*» a los puntos propios, de noción intuitiva general.

Vamos a efectuar simultáneamente ambas adjunciones. Para ello tomemos *coordenadas homogéneas*, para las cuales se admitan también valores complejos, y pongamos

$$x : y : z = \xi : \eta : \tau$$

si nos limitamos al plano, y excluyendo el sistema de valores 0, 0, 0. Consideremos, a modo de ejemplo, la *ecuación cuadrática homogénea*

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0. \quad (1)$$

Llamaremos *curva de segundo orden*, al conjunto de los puntos (*propios o del infinito*) que representan todos los sistemas de valores  $\xi, \eta, \tau$ , reales o complejos, que satisfacen a la ecuación. También se acostumbra llamar *cónicas* a estas curvas, denominación que fácilmente confunde a los no habituados a operar con elementos imaginarios, pues puede llegar a ocurrir que una curva definida del modo indicado, carezca en absoluto de puntos reales.

Combinemos ahora la (1) con una *ecuación lineal*

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\tau = 0 \quad (2)$$

que puede considerarse, análogamente, como definición de una *curva de primer orden*, o sea, de una *recta*.

Ambas ecuaciones (1) y (2) tienen dos ternas de soluciones comunes, lo cual quiere decir que *una línea de primer orden y una de segundo, se «cortan» en dos puntos que pueden ser reales o imaginarios, propios o del infinito, distintos o confundidos en uno.* Es claro que existen casos de degeneración, que dan origen a excepciones de este teorema. Así, si el primer miembro de (1) se descompone en dos factores lineales y uno de ellos es idéntico al primer miembro de (2), es decir, si la línea de segundo orden es un «par de rectas» y la (2) es una de ellas, todo punto de (2) es común a la línea de segundo orden y a la recta considerada.

Este caso singular se presenta cuando la ecuación cuadrática que procede de la eliminación de una variable entre las dos dadas, tiene sus coeficientes nulos.

Si los primeros miembros de ambas ecuaciones o de una sola de ellas son idénticamente nulos, se obtienen otros casos de degeneración, pero de todos estos, como de otros, igualmente triviales, prescindiremos en lo sucesivo, ocupándonos sólo del caso general. Entonces podemos, por ejemplo, decir cuando consideremos *dos curvas de segundo orden, que siempre tienen cuatro puntos comunes.*

Tomando coordenadas homogéneas en el espacio

$$x : y : z : 1 = \xi : \eta : \zeta : \tau$$

prescindiendo también del sistema  $0 : 0 : 0 : 0$  y admitiendo que pueden tomar valores complejos, se definen las *superficies de primero o de segundo orden* como conjunto de los puntos determinados por las soluciones de una ecuación homogénea lineal o cuadrática, respectivamente. También se puede demostrar fácilmente que aparte excepciones triviales, *un plano corta a una superficie de segundo orden según una cónica, y que dos superficies de segundo orden tienen común una curva alabeada de cuarto orden, que a su vez tiene cuatro puntos comunes con todo plano.*

Poncelet aplicó ya en 1822 estas ideas en su «*Traité des*

*proprietés proyectivas des figures»* a la circunferencia y a la esfera, pero sin usar coordenadas homogéneas, sino sirviéndose de un fuerte sentido de la continuidad geométrica. Para dar a conocer los resultados que obtuvo, partiremos de la *ecuación de la circunferencia* :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

que en coordenadas homogéneas es

$$(\xi - a \tau)^2 + (\eta - b \tau)^2 - r^2 \tau^2 = 0.$$

La intersección con la recta del infinito,  $\tau=0$ , está dada por las ecuaciones :

$$\xi^2 + \eta^2 = 0, \quad \tau = 0$$

que son independientes de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $r$ , que caracterizan cada circunferencia en particular. *Todas las circunferencias del plano cortan, pues, a la recta del infinito en los mismos puntos :*

$$\xi : \eta = \pm i, \quad \tau = 0$$

que se llaman *puntos circulares (imaginarios) del plano*.

Análogamente se puede deducir que *todas las esferas del espacio cortan al plano del infinito en una misma curva imaginaria*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0$$

que se denomina *curva esférica (imaginaria)*.

Recíprocamente:  *toda curva de segundo orden que pase por los puntos circulares de un plano, es una circunferencia, y toda superficie de segundo orden que corte al plano del infinito en*

la curva esférica, es una esfera, de modo que se tienen así propiedades características del círculo y de la esfera.

Deliberadamente, no hemos dicho puntos circulares o curva esférica *del infinito*, porque su distancia al origen de coordenadas, no es como pudiera creerse infinita (\*), sino *indeterminada*, puesto que tiene la forma :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\tau} = \frac{0}{0}$$

Lo mismo ocurre con la distancia a cualquier punto que no sea el origen. Este resultado sorprendente, procede de que hemos impuesto a los puntos circulares dos condiciones en apariencia contradictorias, a saber : la de distar  $r$  de un punto propio (por estar en la circunferencia de radio  $r$ ) y la de estar infinitamente alejados de él ; paradoja que las fórmulas analíticas no pueden expresar más que por medio de la indeterminación.

La consideración de los puntos circulares y de la curva esférica impropia, permiten *incluir la teoría de la circunferencia y de la esfera en la general de las curvas y superficies de segundo orden*, mientras que en el estudio más elemental es preciso considerar una porción de casos particulares. Así en la Geometría analítica elemental se habla siempre sólo de dos *puntos* de intersección de dos circunferencias, porque la eliminación de una variable entre sus ecuaciones conduce a una ecuación que sólo es de segundo grado. Ahora bien, como, según lo dicho, las dos circunferencias también tienen comunes los puntos circulares del plano, no considerados en Geometría elemental, resulta que ambas circunferencias tienen *cuatro puntos* de

---

(\*) La sutileza de lenguaje del autor de no llamar del infinito a elementos del plano del infinito, obedece a que, como es costumbre frecuente en autores alemanes, habla ordinariamente de elementos «alejados infinitamente» y en tal sentido la observación es, como era natural, muy justa y oportuna. No parece ya necesaria en castellano, porque siempre se habla de elementos *del infinito* y, afortunadamente, sólo muy raras veces de elementos «a distancia infinita». (N. del T.)

intersección, como dice el teorema general antes enunciado sobre las curvas de segundo orden. Análogamente, dos esferas se cortan en una circunferencia, que en unión con la curva esférica impropia que todas tienen común, constituye una *curva de cuarto orden*.

En relación con esto, digamos algo acerca de la llamada *transformación imaginaria*, que no es otra cosa que una *colineación con coeficientes complejos*, que hace corresponderse puntos imaginarios con puntos reales. Así, en el estudio de los puntos circulares, se utiliza con ventaja la transformación

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = i\eta, \quad \tau' = \tau,$$

que convierte la ecuación  $\xi^2 + \eta^2 = 0$ , en la  $\xi'^2 - \eta'^2 = 0$ , con lo cual, los puntos circulares  $\xi : \eta = \pm i, \tau = 0$ , se transforman en los impropios, pero reales,  $\xi' : \eta' = \pm 1, \tau = 0$ , que son los puntos del infinito de las bisectrices del ángulo formado por los ejes de coordenadas. Todas las circunferencias se transforman en cónicas que pasan por estos dos puntos impropios; es decir, en todas las hipérbolas equiláteras, cuyas asíntotas son paralelas a dichas bisectrices. Todos los teoremas sobre circunferencias se convierten en otros relativos a hipérbolas, lo cual resulta conveniente a veces, sobre todo cuando se trata de aplicar las mismas ideas al espacio.

Podrá caber la duda de si la teoría de los elementos imaginarios es susceptible de desarrollarse de un modo puramente geométrico. Efectivamente, esto ha tardado bastante tiempo en conseguirse, pues ni Poncelet ni Steiner llegaron a tener una idea clara de la significación geométrica de las expresiones imaginarias, siendo *Staudt* el primero que resolvió completamente el problema en sus obras *Geometrie der Lage* (\*) y *Beiträgen zur Geometrie der Lage* (\*\*) y de sus ideas vamos a decir algo, advirtiendo que estos libros de *Staudt* son de lectura muy difícil, porque sus teorías están expuestas sin utilizar fórmulas y

---

(\*) Nurenberg, 1846.

(\*\*) Nurenberg, 1856-1860.

sin hacer el menor llamamiento a la intuición, sino en forma puramente deductiva. Más cómodamente comprensiva es siempre la exposición genética, que sigue el camino que probablemente llevó al autor al extremo de su concepción.

Las dos obras de Von Staudt corresponden a *dos diferentes grados de desarrollo de su teoría*. En la de 1846 se estudian las *formas de segundo grado con coeficientes reales*, y decimos *formas* para abstraer la idea del número de dimensiones (recta, plano o espacio). Sea en primer lugar una *curva* de segundo orden; es decir, una ecuación cuadrática, homogénea, de tres variables y con coeficientes reales:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0.$$

Desde el punto de vista analítico es completamente indiferente que esta ecuación tenga ó no soluciones reales, es decir, que la línea de segundo orden tenga una rama real o sólo puntos imaginarios. La cuestión es ver de qué manera intuitiva puede concebir el geómetra puro la curva en este segundo caso, de qué medios geométricos puede servirse para definirla. Lo mismo ocurre en el espacio de una dimensión, cuando se corta la curva por una recta cualquiera, por ejemplo, el eje  $x(\eta=0)$ . La intersección está dada por la ecuación con coeficientes reales:

$$A\xi^2 + 2D\xi\eta + F\tau^2 = 0$$

y se trata de encontrar una interpretación geométrica válida para el caso de raíces complejas.

La idea de Staudt consiste en sustituir la curva de segundo orden por el *sistema polar* que le corresponde, del cual hemos hablado anteriormente (pág. 147), es decir, una transformación correlativa recíproca, definida por la ecuación:

$$A\xi\xi' + B(\xi\eta' + \xi'\eta) + C\eta\eta' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + E(\eta\tau' + \eta'\tau) + F\tau\tau' = 0$$

Por ser reales los coeficientes, ésta es una *relación real*, en la que a cada punto real corresponde una recta también real, sea o no real la curva misma. Pero esta polaridad determina completamente la curva como *conjunto de todos los puntos que*

están sobre su polar, puntos que pueden existir efectivamente o no, es decir, pueden ser reales o imaginarios, pero en todo caso, el sistema polar constituye *siempre una representación real de la curva de segundo orden definida por la ecuación*, que puede utilizarse en lugar de la curva.

Cortando por el eje  $x$ , para lo cual basta hacer  $\tau = \tau' = 0$ , se obtiene una transformación definida por:

$$A\xi\xi' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + F\tau\tau' = 0$$

que hace corresponder entre sí cada dos puntos del eje. Los puntos de intersección del eje  $x$  con la curva son los homólogos de sí mismos en esta correspondencia, puntos que se llaman *dobles*

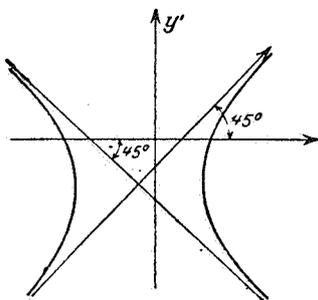


Figura 90

o de coincidencia y pueden ser reales o imaginarios y la correspondencia que los define es siempre una representación real de los mismos.

Los pares  $\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\xi'}{\tau'}\right)$  recíprocamente homólogos, o que, como también se dice, se corresponden doblemente en esta polaridad, se dice, utilizando la denominación ya usada en el siglo xvii por *Desargues*, que son *pares de puntos de una involución*, y se distinguen *dos especies principales*, según que los puntos dobles sean reales o imaginarios, y un caso límite intermedio, en el cual coinciden los dos puntos. Lo fundamental aquí es la involución; que tenga o no puntos dobles es ya cosa secundaria.

Con estas consideraciones que evidentemente pueden generalizarse para el espacio, no se ha interpretado el imaginarismo, pero queda establecido, en lo que concierne a las formas de segundo orden, un *criterio independiente de la distinción entre real o imaginario*. Toda forma de segundo orden está representada por un sistema polar real, con el que puede operarse geoméricamente lo mismo que se opera analíticamente con las ecuaciones reales de la forma.

Un ejemplo aclarará más esto. Imaginemos dada una curva de segundo orden, es decir, un sistema polar y agreguémosle una recta. Para la intuición inmediata sería preciso considerar muchos casos distintos posibles, según que la curva tenga o no puntos reales, y si los tiene, según que la recta la corte o no.

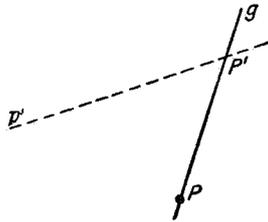


Figura 91

Pero en todos los casos, el sistema polar plano determina sobre la recta (fig. 91), un sistema polar lineal, es decir, una involución: a cada punto  $P$  de  $g$  corresponde en el primero una polar  $p'$ , la cual corta a  $g$  en un punto  $P'$ , y los dos puntos ( $P, P'$ ) describen la involución de que hablamos; después se podrá investigar si tiene puntos dobles reales o no. Hemos llegado así por vía geométrica al mismo resultado que antes utilizando ecuaciones.

Apliquemos estas consideraciones al caso de los *puntos circulares* y de la *curva esférica*. Habíamos dicho que dos circunferencias cualesquiera cortan a la recta del infinito de su plano en los mismos puntos (puntos circulares); pues esto equivale geoméricamente a decir que *los sistemas polares de ambas, determinan una misma involución en la recta del infinito*. En efecto, la polar  $p'_1$  de un punto  $P$  del infinito respecto a una de las circunferencias, es la recta que une los puntos de contacto de las

dos tangentes de dirección  $P$ , o sea, el diámetro perpendicular a dicha dirección (fig. 92). Lo mismo ocurre en la otra circunferencia, de modo que ambas polares  $p'_1$  y  $p'_2$ , son paralelas, es decir, cortan a la recta del infinito en un mismo punto  $P'$ . Resulta, pues, que los sistemas polares de todas las circunferencias determinan en la recta del infinito del plano la misma polaridad, que recibe el nombre de «involución absoluta» y cada par de puntos homólogos en ella, se proyecta desde un punto propio cualquiera según dos rectas perpendiculares entre sí.

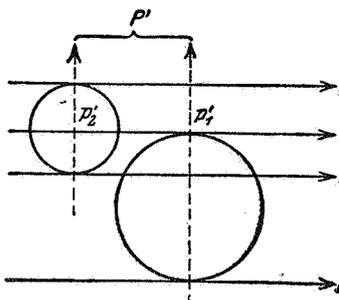


Figura 92

Para traducir analíticamente estas propiedades, partiremos de la ecuación de la circunferencia:

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0$$

o sea,

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi\tau - 2b\eta\tau + (a^2 + b^2 - r^2)\tau^2 = 0$$

El sistema polar correspondiente está representado por

$$\xi\xi' + \eta\eta' - a(\xi\tau' + \xi'\tau) - b(\eta\tau' + \eta'\tau) + (a^2 + b^2 - r^2)\tau\tau' = 0$$

y haciendo en esta ecuación  $\tau = \tau' = 0$ , se obtiene la correspondencia buscada sobre la recta del infinito:

$$\xi\xi' + \eta\eta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0.$$

Estas ecuaciones resultan, como se ve, independientes de las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $r$ , que caracterizaban la circunferencia primitiva.

va. Además la primera indica que las dos rectas que unen cualquier punto con los  $(\xi, \eta, 0)$  y  $(\xi', \eta', 0)$  son perpendiculares entre sí, resultado que coincide con el que geoméricamente hemos obtenido.

Procediendo del mismo modo en el espacio, resulta que los sistemas polares correspondientes a dos esferas, definen en el plano del infinito un sistema polar absoluto, representado por las ecuaciones :

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0$$

que nos dicen que las direcciones  $\xi : \eta : \zeta$  y  $\xi' : \eta' : \zeta'$  son perpendiculares entre sí, de modo que a cada punto  $P$  del infinito, le corresponde la recta del infinito de los planos perpendiculares a la dirección  $P$ .

En este primer estudio hecho por Staudt, más bien se soslaya que se acomete directamente la interpretación geométrica de los elementos imaginarios, siendo preciso acudir al segundo de los libros citados anteriormente, *Beiträgen zur Geometrie der Lage*, de 1856-1860, para encontrar una representación geométrica efectiva de los puntos, rectas y planos imaginarios. El proceso para llegar a ella, está expuesto en la obra de Staudt de un modo demasiado abstracto y difícilmente comprensible, razón por la cual adoptaremos el procedimiento analítico usado por Stolz (\*). Stolz, que en aquella época estaba conmigo en Gotinga, había leído las obras de Staudt, cosa que nunca había logrado yo por completo. De él aprendí yo entonces, en conversaciones, lo mucho interesante también en otros aspectos que hay en aquellas obras, y sobre lo cual he trabajado después en muchas ocasiones. En lo que sigue, quisiera hacer resaltar sólo las líneas fundamentales del proceso del razonamiento, sin detenerme en examinar todas las particularidades posibles, y aun así, limitándome a la consideración de las figuras planas.

Sea, en primer término, un punto imaginario  $P$ , definido por las tres coordenadas complejas :

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2 \quad (1)$$

(\*) Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie. *Mathematische Annalen*, tomo 4, página 416; 1871.

Se trata de construir una *figura real* que represente dicho punto, con la condición de que sea invariante en todas las transformaciones proyectivas reales. Esto se consigue de la manera siguiente :

1.º Considerando los puntos reales  $P_1$  y  $P_2$  que tienen respectivamente como coordenadas las partes reales y los coeficientes de  $i$ , de las coordenadas de  $P$

$$P_1 \equiv (\xi_1, \eta_1, \tau_1); \quad P_2 \equiv (\xi_2, \eta_2, \tau_2) \quad (1a)$$

Estos dos puntos tienen que ser distintos, es decir, no puede ocurrir que  $\xi_1 : \eta_1 : \tau_1 = \xi_2 : \eta_2 : \tau_2$  porque entonces  $\xi : \eta : \tau$  representaría un punto real.  $P_1$  y  $P_2$  determinan, pues, una recta cuya ecuación es :

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

y sobre dicha recta están, tanto un punto imaginario  $P$ , dado, como su *punto imaginario conjugado*  $\bar{P}$ , que tiene por coordenadas,

$$\bar{\xi} = \xi_1 - i \xi_2, \quad \bar{\eta} = \eta_1 - i \eta_2, \quad \bar{\tau} = \tau_1 - i \tau_2 \quad (\bar{1})$$

las cuales satisfacen lo mismo que las (1) a la ecuación (2).

2.º El par de puntos  $P_1, P_2$ , así construido no puede servir como representante real del imaginario  $P$ , porque éste está caracterizado solamente por las razones  $\xi : \eta : \tau$ , mientras que aquellos dependen de cada uno de los valores particulares que puedan tomar  $\xi, \eta$  y  $\tau$ . Se obtiene, en efecto, el mismo punto  $P$ , tomando en lugar de las coordenadas  $\xi, \eta, \tau$ , sus productos por la constante compleja :

$$\rho = \rho_1 + i \rho_2$$

que pueden escribirse así :

$$\left. \begin{aligned} \rho \xi &= \rho_1 \xi_1 - \rho_2 \xi_2 + i (\rho_2 \xi_1 + \rho_1 \xi_2) \\ \rho \eta &= \rho_1 \eta_1 - \rho_2 \eta_2 + i (\rho_2 \eta_1 + \rho_1 \eta_2) \\ \rho \tau &= \rho_1 \tau_1 - \rho_2 \tau_2 + i (\rho_2 \tau_1 + \rho_1 \tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

de donde, separando las partes reales de las imaginarias, resultan en vez de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , otros puntos reales  $P'_1$  y  $P'_2$ , cuyas coordenadas son :

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 : \eta'_1 : \tau'_1 &= (\rho_1 \xi_1 - \rho_2 \xi_2) : (\rho_1 \eta_1 - \rho_2 \eta_2) : (\rho_1 \tau_1 - \rho_2 \tau_2) \\ \xi'_2 : \eta'_2 : \tau'_2 &= (\rho_2 \xi_1 + \rho_1 \xi_2) : (\rho_2 \eta_1 + \rho_1 \eta_2) : (\rho_2 \tau_1 + \rho_1 \tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (3 a)$$

Considerando ahora el *conjunto* de todos los pares de puntos correspondientes a todos los valores de  $\rho_1, \rho_2$ , en el que sólo intervienen las razones  $\xi : \eta : \tau$ , es decir, el punto «geométrico»  $P$ , este conjunto será una representación de  $P$  que podrá ser utilizada siempre. Además, su relación con  $P$  es, en efecto, proyectiva, pues de cualquier manera que se transformen linealmente  $\xi, \eta, \tau$ , la misma sustitución experimentarán, evidentemente, tanto  $\xi'_1, \eta'_1, \tau'_1$ , como  $\xi'_2, \eta'_2, \tau'_2$ .

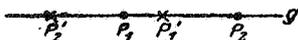


Figura 93

3.º Para estudiar la naturaleza geométrica de este conjunto de pares de puntos, observemos en primer lugar, que cualquiera que sea  $\rho$ , los puntos  $P'_1$  y  $P'_2$  están en la recta  $P_1 P_2$ , porque sus coordenadas satisfacen a la ecuación (2). Dando ahora a  $\rho_1$  y  $\rho_2$  todos los valores reales,  $\rho$  toma todos los valores complejos posible,  $P'_1$  recorre toda la recta y a cada una de sus posiciones corresponde otra de  $P'_2$ ; por ejemplo, para  $\rho_1=1, \rho_2=0$  resulta el par  $P_1, P_2$ . De este modo, queda establecida entre ambos puntos una correspondencia biunívoca, que se pone más claramente de manifiesto haciendo :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = -\lambda$$

con lo cual se obtiene :

$$\left. \begin{aligned} \text{Para } P'_2 : \quad \xi'_1 : \eta'_2 : \tau'_1 &= \xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2 \\ \text{» } P'_1 : \quad \xi'_2 : \eta'_2 : \tau'_2 &= \xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda} \eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2 \end{aligned} \right\} \quad (3 b)$$

4.º Estableciendo en la recta  $P_1 P_2$  un sistema de abscisas, las de cada uno de los puntos  $P'_1, P'_2$ , son funciones enteras, lineales de los parámetros  $\lambda'_1 = \lambda$  y  $\lambda'_2 = -\frac{1}{\lambda}$  respectivamente.

La ecuación  $\lambda'_1 \cdot \lambda'_2 = -1$  entre ambos parámetros, es una relación bilineal y simétrica entre  $P'_1$  y  $P'_2$  la cual indica que *cada dos de estos puntos son homólogos en una involución* (página 159 y página 147).

5.º Los puntos dobles de esta involución, es decir, homólogos de sí mismos, se obtienen haciendo  $\lambda = -\frac{1}{\lambda}$ , o sea,  $\lambda = \pm i$ .

Ambos son, como se ve, imaginarios, siendo uno de ellos el  $P$  de que hemos partido, y el otro su conjugado  $\bar{P}$ .

De este modo, el primer concepto de Staudt queda perfeccionado con la adopción, además del primitivo punto  $P$ , de su conjugado, que completa con él la figura unidimensional de segundo grado representada por una ecuación cuadrática de coeficientes reales, y hemos construido como su representación real

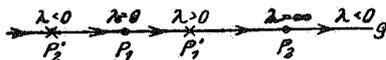


Figura 94

la involución correspondiente. Obsérvese que una involución cualquiera, de esta especie, está determinada cuando se dan *dos pares de puntos* homólogos, tales como  $P_1, P_2$  y  $P'_1, P'_2$ ; para que la involución tenga imaginarios sus puntos dobles, es preciso que ambos estén separados, es decir, que uno de los puntos  $P'_1, P'_2$  esté entre  $P_1$  y  $P_2$  y el otro fuera del segmento  $P_1 P_2$ .

6.º Para resolver completamente el problema que nos hemos propuesto, falta todavía encontrar una representación geométrica de cada uno de los dos puntos imaginarios conjugados, independientemente del otro. Esto ha sido conseguido por Staudt, en 1856, por una consideración sutilísima. Si se dan a  $\lambda$  valores reales y crecientes de 0 a  $\infty$  y de  $-\infty$  a 0, el punto  $P'_1$  de coordenadas  $\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2$  recorre la recta  $g$  en un *sentido determinado* (fig. 94). Se ve fácilmente, que el mismo sentido se obtiene partiendo de otro punto cualquiera,

cuyas coordenadas sean las de  $P$  multiplicadas por una constante arbitraria  $\rho$ , es decir, considerando el punto  $\xi_1 + \lambda \xi'_2, \dots$ ; y que, además, en toda transformación proyectiva de  $P$ , el sentido del punto representativo en la misma transformación depende del antes determinado. Tenemos, pues, un convenio que satisface las condiciones propuestas, *asociando de una vez para siempre este sentido del movimiento al punto primitivo  $P$ , de coordenadas  $\xi_1 + i \xi_2, \dots$*

Como el punto imaginario conjugado  $P$  tiene las coordenadas  $\xi_1 + i(-\xi_2), \dots$ , según lo dicho, se le hace corresponder en la recta  $g$ , el sentido del movimiento del punto  $\xi_1 + \lambda(-\xi_2)$  para valores crecientes de  $\lambda$ , que es precisamente el contrario al anterior; y, por consiguiente, se ha logrado la diferenciación buscada: dicho brevemente: *queda establecida la distinción entre  $+i$  y  $-i$ , mediante la de los sentidos correspondientes en la recta a los valores reales de  $\lambda$ .*

Como resumen de las consideraciones precedentes se puede enunciar la siguiente regla: *Para obtener la representación geométrica, real, unívoca e invariante en toda proyectividad del punto imaginario  $\xi_1 + i \xi_2 : \eta_1 + i \eta_2 : \tau_1 + i \tau_2$ , se construyen los puntos  $P_1(\xi_1 : \eta_1 : \tau_1)$  y  $P_2(\xi_2 : \eta_2 : \tau_2)$ , y, sobre la recta que determinan, la involución, en la cual son homólogos los puntos*

$$P'_1(\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2)$$

y

$$P'_2\left(\xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda} \eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2\right)$$

y se le agrega el sentido del movimiento de  $P'_1$  para valores positivos y crecientes de  $\lambda$ .

7.º Sólo queda ya por ver que: *recíprocamente, toda figura real constituida por una recta, dos pares separados de puntos sobre ella,  $P_1, P_2$  y  $P'_1, P'_2$  (o lo que es lo mismo, una involución de puntos sin puntos dobles), así como un sentido, representa un punto imaginario y sólo uno.*

Para demostrar esto, basta multiplicar las coordenadas de  $P_2$  por un factor constante real que haga que las de

$$P'_1 (\xi_1 + \lambda \xi_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2)$$

y

$$P'_2 \left( \xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2 \right)$$

sean proporcionales, o lo que es lo mismo, que los puntos dobles de la involución dada tengan por coordenadas  $\xi \pm i \xi_2$ , etc.

En cuanto al signo de  $\lambda$ , que aun no está determinado, se escoge de modo que el punto  $\xi_1 + \lambda \xi_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2$  se mueva al crecer  $\lambda$  positivamente, en el mismo sentido que primitivamente habíamos asignado a la involución. Fácilmente se

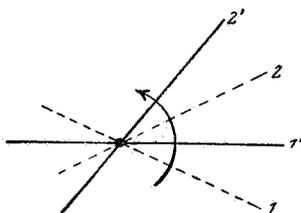


Figura 95

ve también que a las mismas razones de coordenadas, es decir, al mismo punto  $P$ , se llega partiendo de otro par de puntos de la involución.

*La representación de una recta imaginaria se consigue de un modo análogo, por medio de un punto real vértice de un haz de rectas, dos pares separados de éstas, esto es, una involución sin rectas dobles, y, finalmente, un sentido determinado en que se recorre el haz (fig. 95).*

La principal utilidad de estas interpretaciones consiste en poder representar por medio de figuras geométricas reales, todas las relaciones de posición posibles entre elementos complejos, o reales y complejos. Como ejemplo concreto, examinaremos lo que significa que un punto  $P$  (real o imaginario)

esté sobre una recta  $g$  (real o imaginaria). Hay que distinguir cuatro casos :

- 1.º Punto y recta reales ;
- 2.º Punto real y recta imaginaria ;
- 3.º Punto imaginario y recta real ;
- 4.º Punto y recta imaginarios.

El primer caso no requiere aclaración especial alguna. En el segundo, el punto real debe estar también en la recta imaginaria conjugada de la que se da; luego no puede ser otro que el vértice del haz de rectas representativo de ambas. Lo mismo ocurre en el caso tercero, en el que la recta tiene que coincidir con la base de la involución que representa el punto imaginario.

El último caso (fig. 96) es el más interesante. El punto conjugado del que se da, debe estar en la recta conjugada de

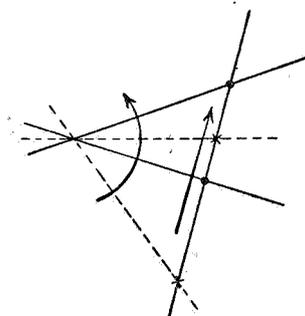


Figura 96

la primitiva, de modo que los pares de puntos homólogos de la involución que representa al punto, tienen que estar sobre los pares de rectas homólogas en la involución que representa a la recta, es decir, *las dos involuciones, una de puntos y otra de rectas, deben ser perspectivas y, además, como se ve inmediatamente, los sentidos deben también ser perspectivas.*

*Añadiendo al conjunto de todos los puntos y rectas reales del plano el formado por los elementos definidos por todas las involuciones de rectas y puntos sin elementos dobles, con sus sentidos puede desarrollarse toda la Geometría analítica del*

plano con coordenadas complejas. Para verlo bastará indicar, a grandes trazos, cómo podrá construirse esta imagen real de la Geometría compleja; lo haremos siguiendo el mismo orden acostumbrado en la Geometría elemental.

1.º Se comienza por establecer los *axiomas de existencia* de los nuevos elementos, con cuya admisión se amplía el campo de la Geometría ordinaria.

2.º Se sigue con los *axiomas de enlace*, que generalizan para los nuevos elementos las propiedades de que *dos puntos determinan una recta y dos rectas determinan un punto*. También aquí pueden distinguirse cuatro casos, siendo muy interesante ver las construcciones reales con involuciones de puntos y rectas a que dan lugar.

3.º En cuanto a los *axiomas de ordenación*, se presentan diferencias esenciales respecto de las que se establecen entre elementos reales exclusivamente, puesto que el conjunto de puntos

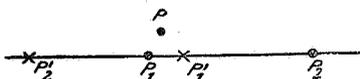


Figura 97

reales y complejos de una recta, constituye un *continuo de dos dimensiones*. De todos es sabido, que en la teoría de funciones el conjunto de valores de una variable compleja se representa por el de puntos de un plano.

4.º Se establecen los *axiomas de continuidad*, que permiten representar los puntos complejos existentes en el entorno de uno real  $P$ . Para ello se traza por este punto (o por otro próximo) una recta real; sobre la cual se toman dos pares de puntos  $P_1P_2$  y  $P'_1P'_2$ , separados uno por el otro (fig. 97) y de modo que dos no homólogos  $P_1$  y  $P'_2$  estén muy próximos entre sí y al  $P$ . Haciendo ahora aproximarse  $P_1$  y  $P'_1$  hasta que coincidan, la involución degenera y el par de puntos imaginarios por ella representados coincide con  $P_1$  y  $P'_1$ , es decir, se convierte en un punto real del entorno de  $P$ .

El desarrollo de esta Geometría es mucho más enfadoso y prolijo que el de la ordinaria de elementos reales, pero tam-

bién mucho más fructífero. Especialmente las *formas algebraicas*, consideradas como conjunto de todos sus elementos *reales* y *complejos*, se pueden estudiar intuitivamente por medio de su representación geométrica, obteniéndose resultados como el teorema fundamental de Algebra, o el teorema de Bézout, que dice que dos curvas de órdenes  $m$  y  $n$ , respectivamente, tienen en general  $mn$  puntos comunes.

La aplicación de la representación geométrica de los elementos imaginarios que acabamos de estudiar, lleva en sí, a pesar de sus ventajas teóricas, grandes complicaciones. Es preferible, por lo tanto, conformarse con la posibilidad, en principio, de dicha representación, y atenerse al punto de vista más sencillo, de considerar como punto imaginario al conjunto de dos coordenadas complejas. Esta interpretación es mucho más ventajosa.

El primero que utilizó este concepto de los elementos imaginarios fué *Poncelet*, al cual siguieron después otros geómetras franceses, sobre todo, *Chasles* y *Darboux*; en Alemania, *Sophus Lie* es el que ha trabajado más en este sentido, obteniendo magníficos resultados.